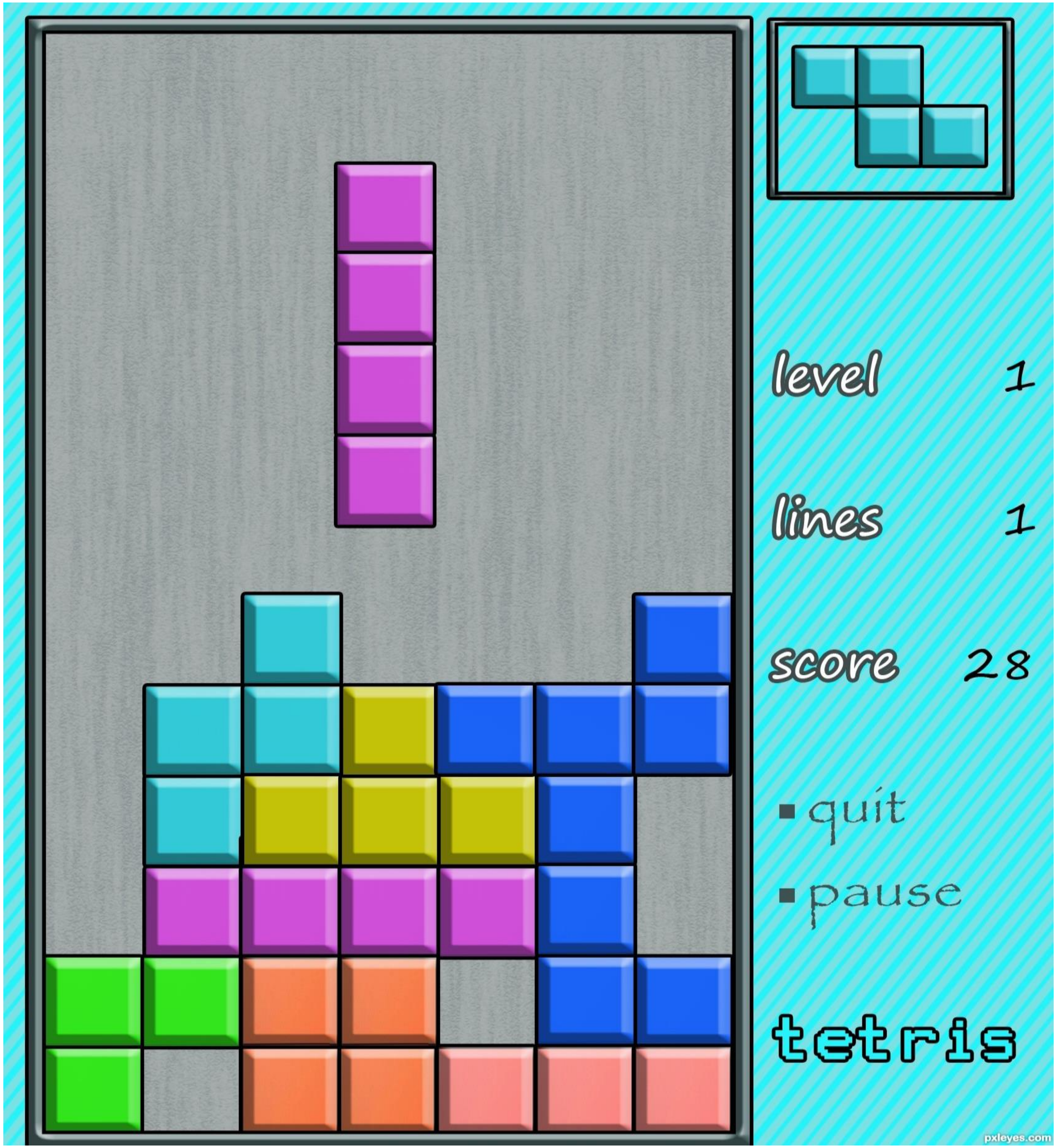
北陸先端大研究会

Max-PLus代数の新分野としてのリカード貿易論

塩沢由典



最小時間スケジューリング:

多くのテトリス・ピースがある。これを以下の条件で積み上げるとき、すべてのピースを埋めるには、最小いくらの高さが必要か。

付加的条件:

(1)回転できない。

(2)横に移動できない。

Max-Plus代数その他の代数系

- 古典的代数
  - 領域　自然数$\mathbb{N}$、整数$\mathbb{Z}$、有理数$\mathbb{Q}$、実数$\mathbb{R}$、複素数$\mathbb{C}$、(4元数$\mathbb{H}$、8元数$\mathbb{O}$、Caley代数)
  - x+y, x y は一律に決まっていた。
- エキゾチック代数
  - 古典的代数とはことなる演算をもつ代数
  - 領域は　整数$\mathbb{Z}$、有理数$\mathbb{Q}$、実数$\mathbb{R}$、正の実数$\mathbb{R}_+$
  - Max-Plus代数はその一つ

Max-plus代数(1)

- 領域は整数$\mathbb{Z}$、実数$\mathbb{R}$ (−∞を加えることも)
- 二つの演算
  - $x \oplus y = \max\{x, y\}$
  - $x \otimes y = x + y$
- 可換で分配的な半環となる:
  - $x \oplus y = y \oplus x$, $x \otimes y = y \otimes x$ （交換法則）
  - $x \otimes (y \oplus z) = x \otimes y \oplus x \otimes z$ (分配法則)

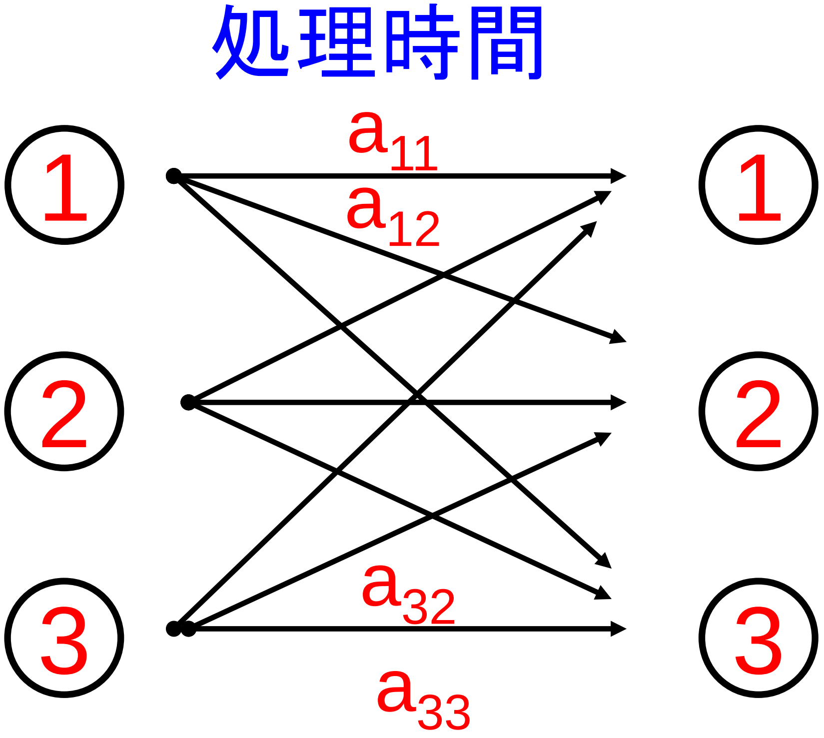
Max-plus代数(2)

- しかし、加法には
  - 零元がない？ (ー∞が加法の0元)
  - 加法の逆元がない： $x \oplus a = b$ を満たすx
- 乗法では
  - 単位元 $0 \otimes x = x$
  - 逆元 $x \otimes a = b$ を満たす $x = b - a$
- 他の性質 $a \oplus a = a$ (和に関する冪等性 ->冪等分析idempotent analysis)

Max-plus代数の応用例(1)

- N個の機械が並んでいて、同時進行する。
- 第t処理の開始時刻 $x_i(t)$とすれば、第t+1処理の開始時刻は $x_j(t)+a_{ij}$
- 全体では

$$x(t+1)=A\otimes x(t)$$



Max-plus代数の応用例（1）その2

- $y=A\otimes x$を古典的に書くと

$$y_1 = \max\{a_{11}+x_1,\ a_{12}+x_2,\ a_{13}+x_3\}$$
$$y_2 = \max\{a_{21}+x_1,\ a_{22}+x_2,\ a_{23}+x_3\}$$
$$y_3 = \max\{a_{31}+x_1,\ a_{32}+x_2,\ a_{33}+x_3\}$$

- 定常的な進行

$$A\otimes x = \lambda\otimes x$$ （固有値問題）

に解があると、$x(t)$は $\lambda^t\otimes x(0)$に近づく。

離散事象(力学)系　DE(D)S

- Max-plus代数：離散事象力学系(時間付きイベント・グラフで表されるもの)の解析[最適スケジュリングなど]に適用可能。
- 歴史：
  - 離散事象力学系の研究　1950年代から
  - Max-plus代数の適用　1960年代から
  - 制御理論その他へ展開/冪等分析
  - $A \otimes \mathbf{x} \oplus \mathbf{b} = \mathbf{x}$ の解を求めるのがひとつの核

最適制御理論とMax-plus代数

- 最適制御の変分問題(最小作用原理):
  制約条件のもとで問題

  $$\inf_{q(\cdot)}\int_0^T L(q,q')\,dt$$

  を解け。[q(･)を求めよ。]
- この問題を適切に差分化すると

  $$V_k^N(x)=\max_{u\in U}\{c(x,u)+V_{k+1}^N(f(x,u))\}$$

というダイナミック･プログラミングになる。

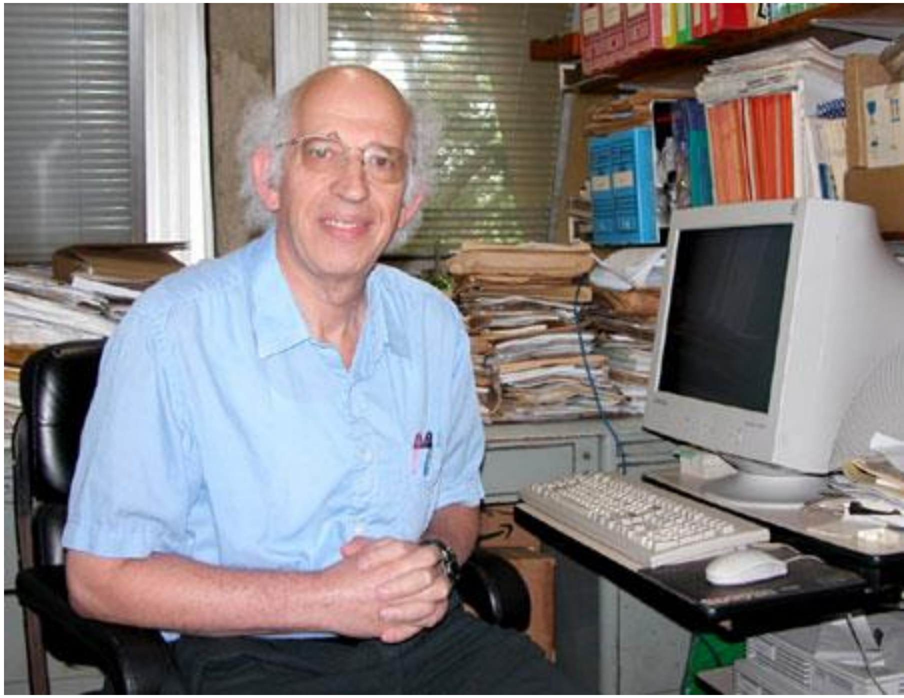
Max-plus代数を使う7つの理由

Gaubert (1998) Two Lectures on Max-plus Algebra

- 最適制御理論の代数
  1. 決定論的マルコフ決定過程＝Max+線型力学
  2. 固有要素＝最適報酬＆政策
  3. 半マルコフ過程の一般スペクトル問題
- 漸近理論の代数
  4. ペロン・フロベニウス漸近理論
- 離散事象システムの代数
  5. 時間付き離散事象系＝ Max+線型系
  6. テトリス・ゲームはMax+線型
- 決定のための代数
  7. 形式言語のFinite Power Propertyは$\mathbf{N}_{\mathrm{min}}$行列の半環の有限性問題
  (I. Simonは、こうした研究をしていた。)

トロピカル代数／トロピカル幾何学

- 基本的にMax-plus代数/Min-plus代数
- tropicalという言葉は、Imre Simonがサンパウロ大教授だったことから。J.-E. Pin(1998)などが普及させた。
- 南回帰線(Tropic of Capricorn)がサンパウロ近くを通っている。



Imre Simon (1943-2009)
専門は計算機科学、オートマトン、トロピカル幾何学。

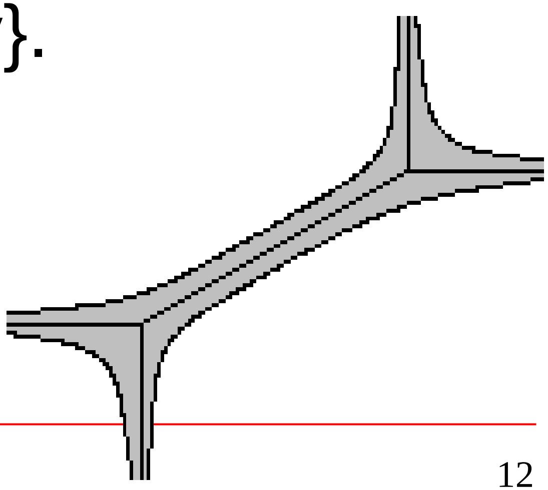
トロピカル数学の新しい発展(1)

- Pin(1998) Tropical semirings, *Idempotency.*
- 純粋数学と結合
  - 代数幾何学　tropical polynomial eqs. にBézoutの定理が成立。
  - Maslovの脱量子化(Dequantisation)

$$\lim_{\varepsilon\to+0} \varepsilon\log(e^{x/\varepsilon}+e^{y/\varepsilon}) = \max\{x, y\}.$$

$$\lim_{\varepsilon\to+0} \varepsilon\log(e^{x/\varepsilon}\cdot e^{y/\varepsilon}) = x + y.$$

  - Mikhalkin(2004)のAmoeba
    - ニュートン多面体



トロピカル数学の新しい発展(2)

- Max-plus半環とtropical幾何の差異
  - 射影空間で考える > 各変数に同じ数を加えたベクトルは同一視する。
  - Max-times半環> 各変数に同じ数を掛けたベクトルは同一視する。同じ方向／相対価格を考える。
- 凸集合の概念の再定義
  - 集合Mが凸 ⇔ $x, y \in M, \alpha,\beta \in \mathbf{R}$のとき

$$\alpha \otimes x \oplus \beta \otimes y \in M$$

サブトロピカル凸幾何学(subtropical convex geometry)

- 基底とする代数　min-times半環
  - 領域　正の実数$\mathbb{R}_+$
  - 演算　$x \oplus y = \min\{x, y\}$,　$x \otimes y = x\, y$.
  - tropical semiringほどexoticでない。>>subtropical
- 凸集合($\mathbb{R}_+^m$の方向のみを考える)
  - 定義　集合Mが凸 ⇔　x, y∈M, α,β>0のとき

$$\alpha \otimes x \oplus \beta \otimes y \in M$$

  - じっさいにはどんな図形か

リカード貿易理論(ここから)

- ひとつのエピソード
  - Stanislav Ulam vs. P. Samuelson
  - 経済学のほとんどの定理は自明だ。
  - 自明でない定理・命題があるか。
  - Samuelson>リカードの比較生産費理論(1817)
- その後の展開(塩沢[未刊]、第2章)
  - J.S. Mill リカードの「未解決問題」について
  - 経済学説史　古典派価値論から新古典派価値論への転換点

リカードの「魔法の4つの数字」

	毛織物	ぶどう酒
イギリス	100	120
ポルトガル	90	80

- 上の表は、毛織物一定量とぶどう酒一定量の生産に必要な両国の労働力
- イギリスは、毛織物・ぶどう酒ともに不利。
- それでも、貿易することには利益がある。

20世紀の国際貿易理論

- リカード理論
  - F. Graham (1890–1949) 多数国・多数財の例を研究
  - Lionel W. McKenzie, R. Jones (ロチェスタ大) 1960年前後に多数国・多数財のリカード理論を研究 (Cf. Ethier, 1999, のJones(1961)評)
  - その他　I. Steedman; Dornbusch,Fischer&Samuelson
- Heckscher-Ohlin-Samuelson理論
  - 2国・2財・2要素>一般均衡論として一般化
  - 要素価格均等化定理(国際的に賃金率は均等化する)
  - Leontiefのパラドックス、20世紀後半>賃金率格差が拡大

リカード貿易理論

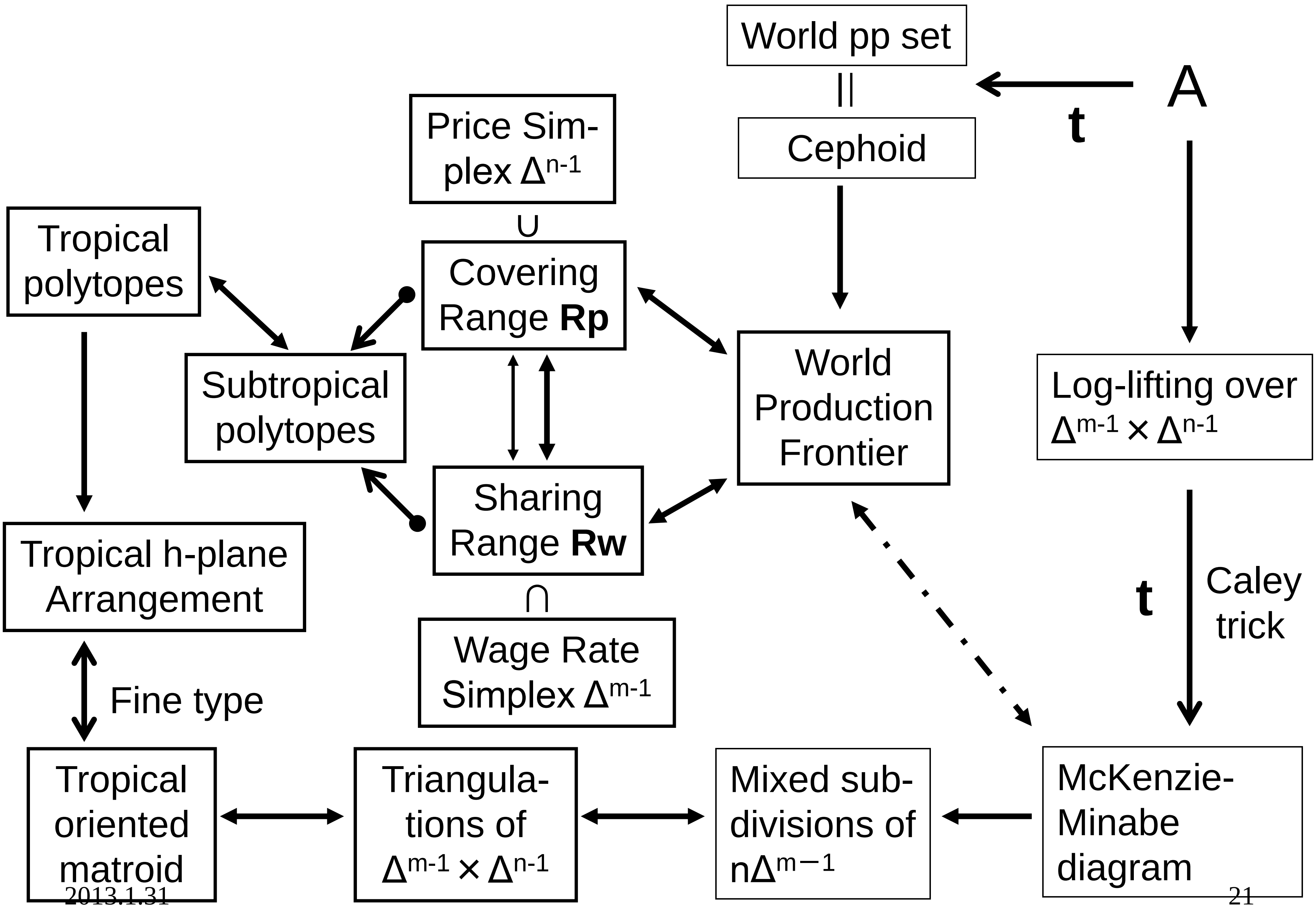
- Ethier(1999, p.764) ”[Jones’] contribution was so definitive that the Ricardian model has since been used almost entirely as a tool for other purposes and not as a subject of research in its own right.”
- これは正しいか。

Jonesたちの残した問題

- McKenzieとJonesの達成
  - 多数国・多数財経済のリカード経済
  - 残された課題　投入財が貿易される場合
  - McKenzie 棉花が輸入されないランカシャー
- Shiozawa (2007) EIER **3**(2):141-87
  - 国際価値論の構成問題>古典理論の弱い環
  - 古典派価値論の構成問題が最終解決
  - ケインズの構想を古典派価値論上に構成する。

今回の報告

- リカード経済(労働投入経済)に限定
- m国n財の一般理論
- リカード貿易理論の数学構造
  ＝サブトロピカル凸幾何学
  - Min-times半環(Max-times半環)の新しい適用例
  - トロピカル幾何学の成果の流用
- 論文：Shiozawa(2013) メールでご請求ください。shiozawa@tamacc.chuo-u.ac.jp


World pp set
||
Cephoid
A
t
Price Sim-plex Δ^n-1
∪
Tropical polytopes
Covering Range Rp
Subtropical polytopes
World Production Frontier
Log-lifting over Δ^m-1 × Δ^n-1
Sharing Range Rw
Tropical h-plane Arrangement
∩
Wage Rate Simplex Δ^m-1
t
Caley trick
Fine type
Tropical oriented matroid
Triangula-tions of Δ^m-1 × Δ^n-1
Mixed sub-divisions of nΔ^m−1
McKenzie-Minabe diagram

世界生産可能集合を知るために

- 分担的な賃金率/被覆的な価格
- 定義：ある賃金率・価格体系において
  - 分担的：すべての国は少なくともひとつの競争的な財(競争的な生産技術)をもつ。
  - 被覆的：すべての財は、少なくともひとつの国で生産利潤率が最大になる。
- 共役行列B を$b_{jh}=1/a_{hj}$と定義すると

$$\mathbf{p} = \mathbf{w} \otimes A, \ \mathbf{w} = \mathbf{p} \otimes B.$$

分担的な賃金率

- 各国の賃金率を$\mathbf{w}$= $(w_1, w_2, \ldots, w_M)$とする。
- h国でj財を生産する労働投入係数a_{hj}
- すくなくともひとつの財が競争的:

$$p_{\mathbf{1}} = \min\{a_{11}w_1, a_{12}\, w_2, \ldots, a_{1M}w_M\},$$
$$p_{\mathbf{2}} = \min\{a_{21}w_1, a_{22}\, w_2, \ldots, a_{2M}w_M\},$$
$$\cdots$$
$$p_N = \min\{a_{N1}w_1, a_{N2}\, w_2, \ldots, a_{NM}w_M\},$$

と置くとき、

$\mathbf{w} = \mathbf{p}\, \mathrm{B}$　を満たすような$\mathbf{w}$, $\mathbf{p}$をどう探すか。

トロピカル凸幾何学の同値定理

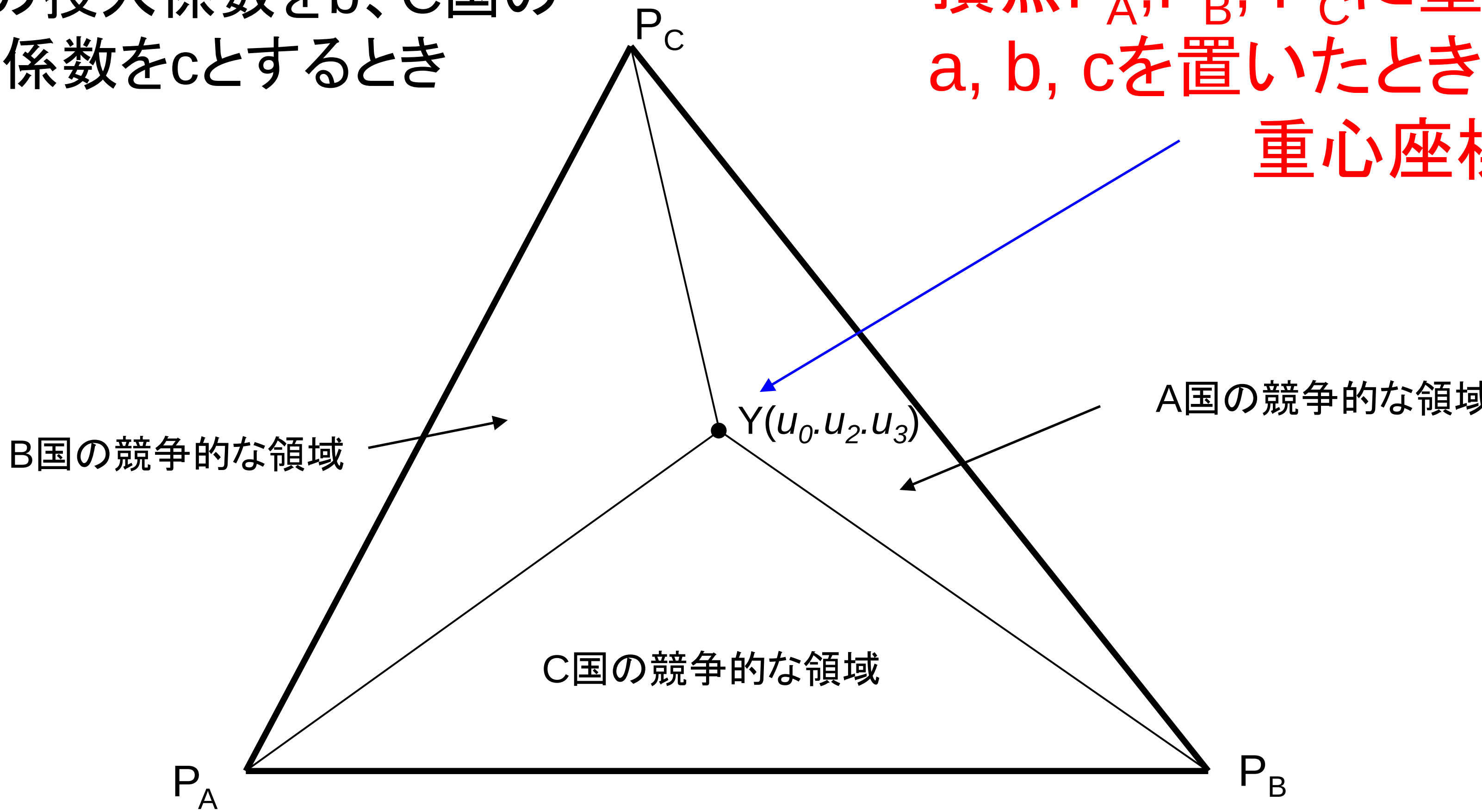
賃金率Δにおいて

- 各財の競争的頂点Y_j =($1/a_{1j}$, $1/a_{2j}$, …, $1/a_{Mj}$)が張る凸集合(サブトロピカルの意味で)
- 一次結合$a_{1j}x_1 \oplus a_{2j}x_2 \oplus \cdots \oplus a_{Mj}x_M$ のトロピカル超平面たちで区切られるΔのモード分割の有界要素の点集合
- Δのモード分割の各要素のfine typeが分担的(spanning、各行各列に要素をもつ)であるもの点集合

は一致する。

ある財mのA国での投入係数をa、
B国の投入係数をb、C国の
投入係数をcとするとき

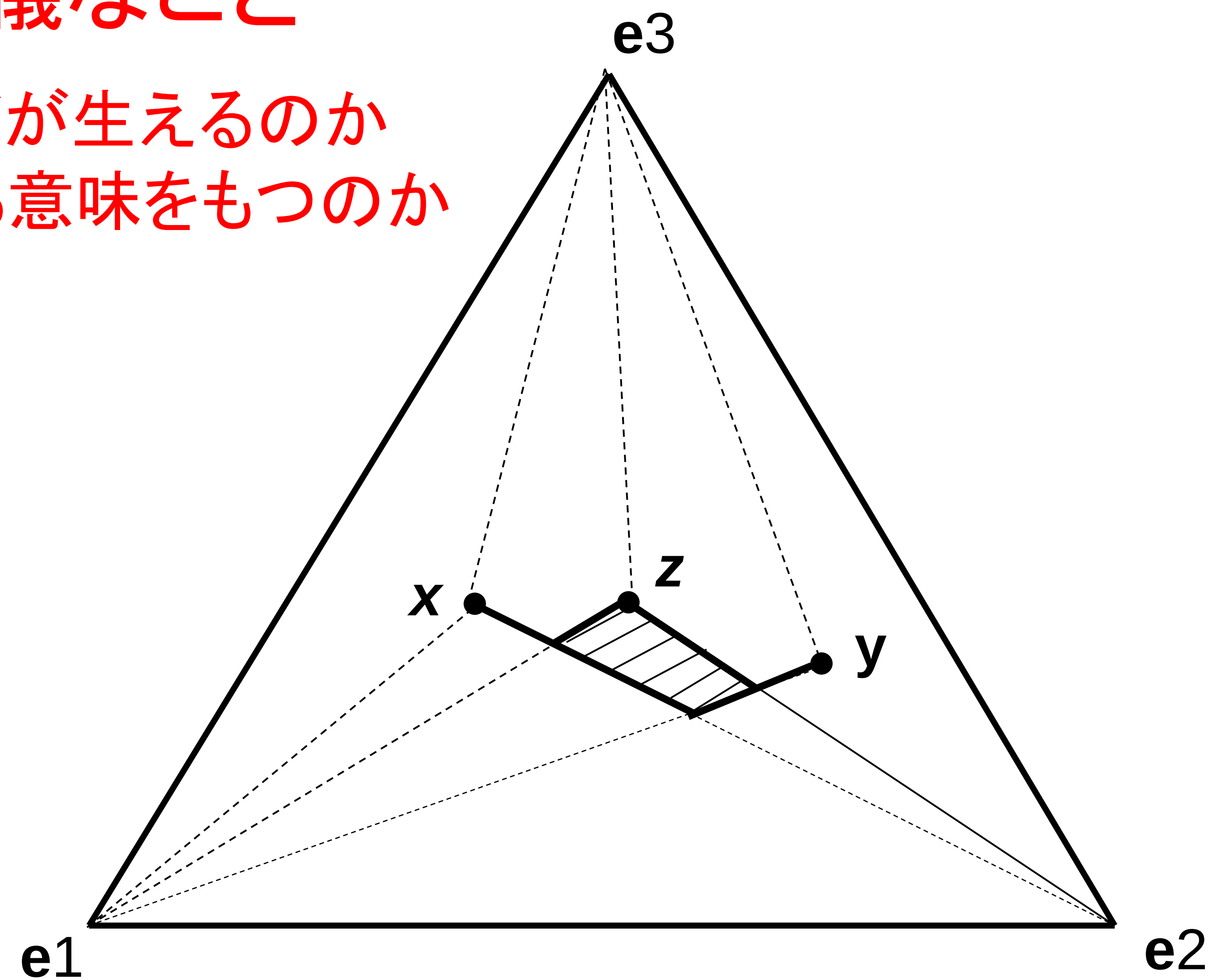
頂点P_A,P_B, P_Cに重み
a, b, cを置いたときの
重心座標



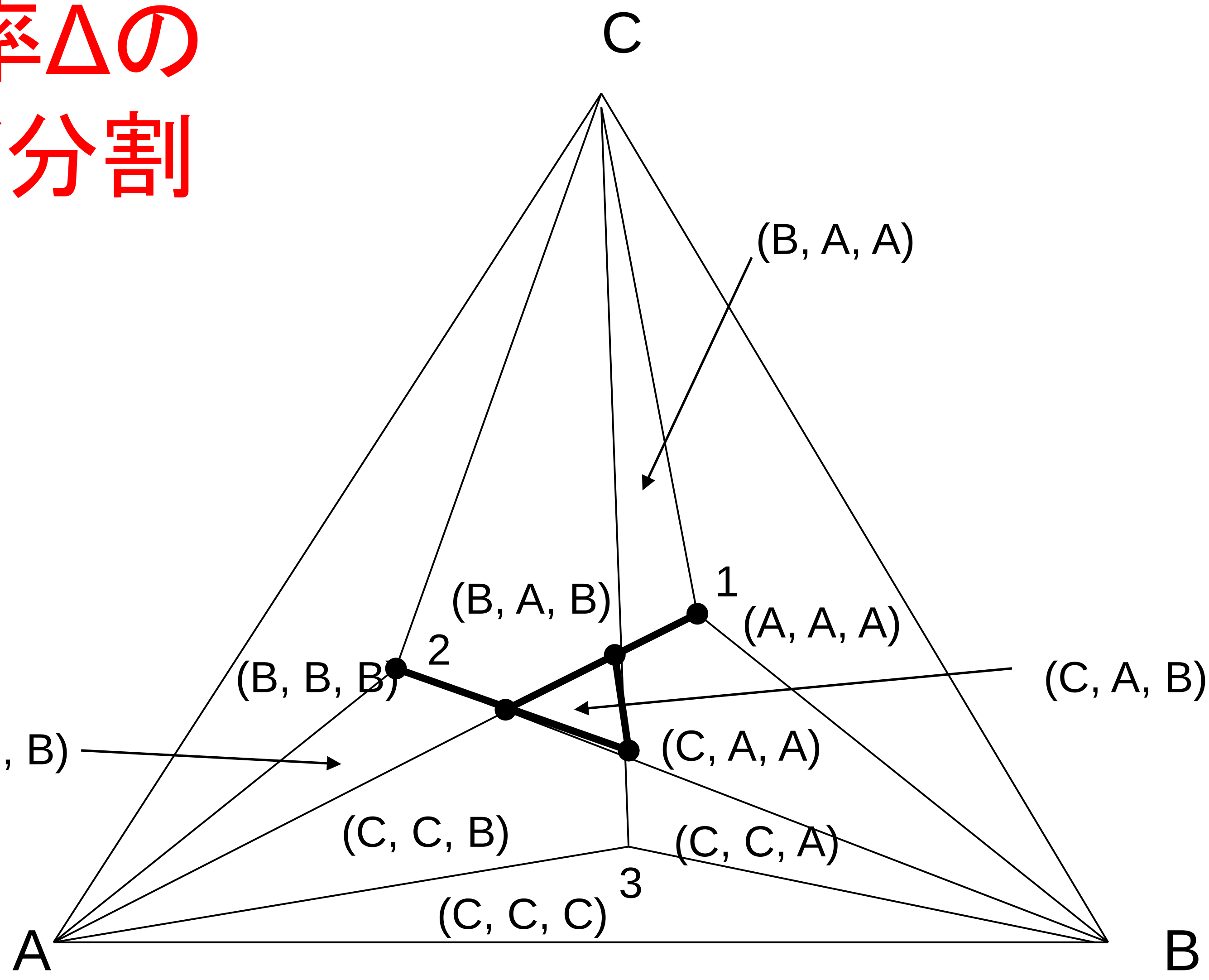
各国の競争的な領域

不思議なこと

- なぜヒゲが生えるのか
- いかなる意味をもつのか



賃金率Δの モード分割



ある賃金率Δのモード分割
各領域のタイプを示す。

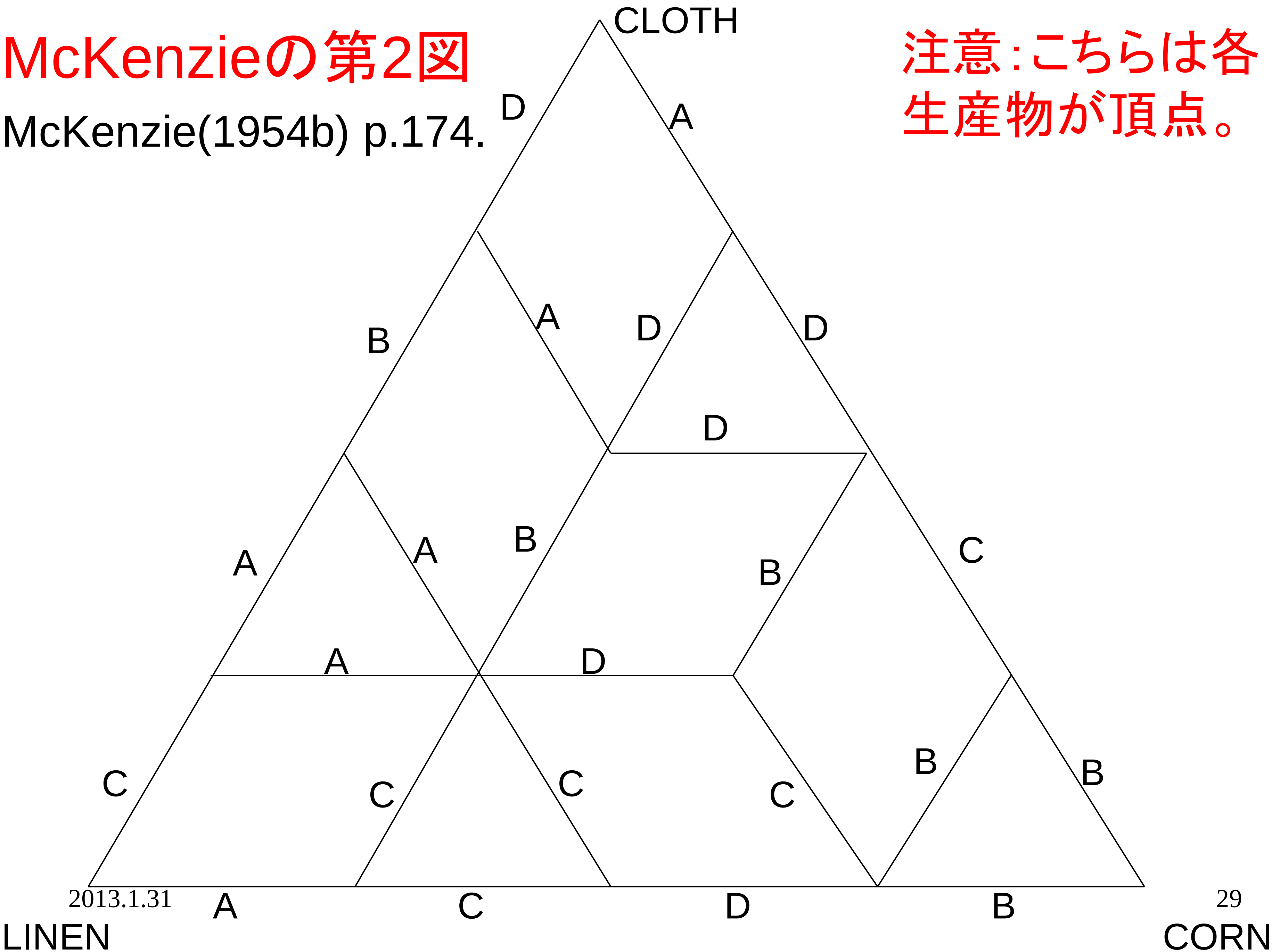
McKenzie-Minabe Diagram

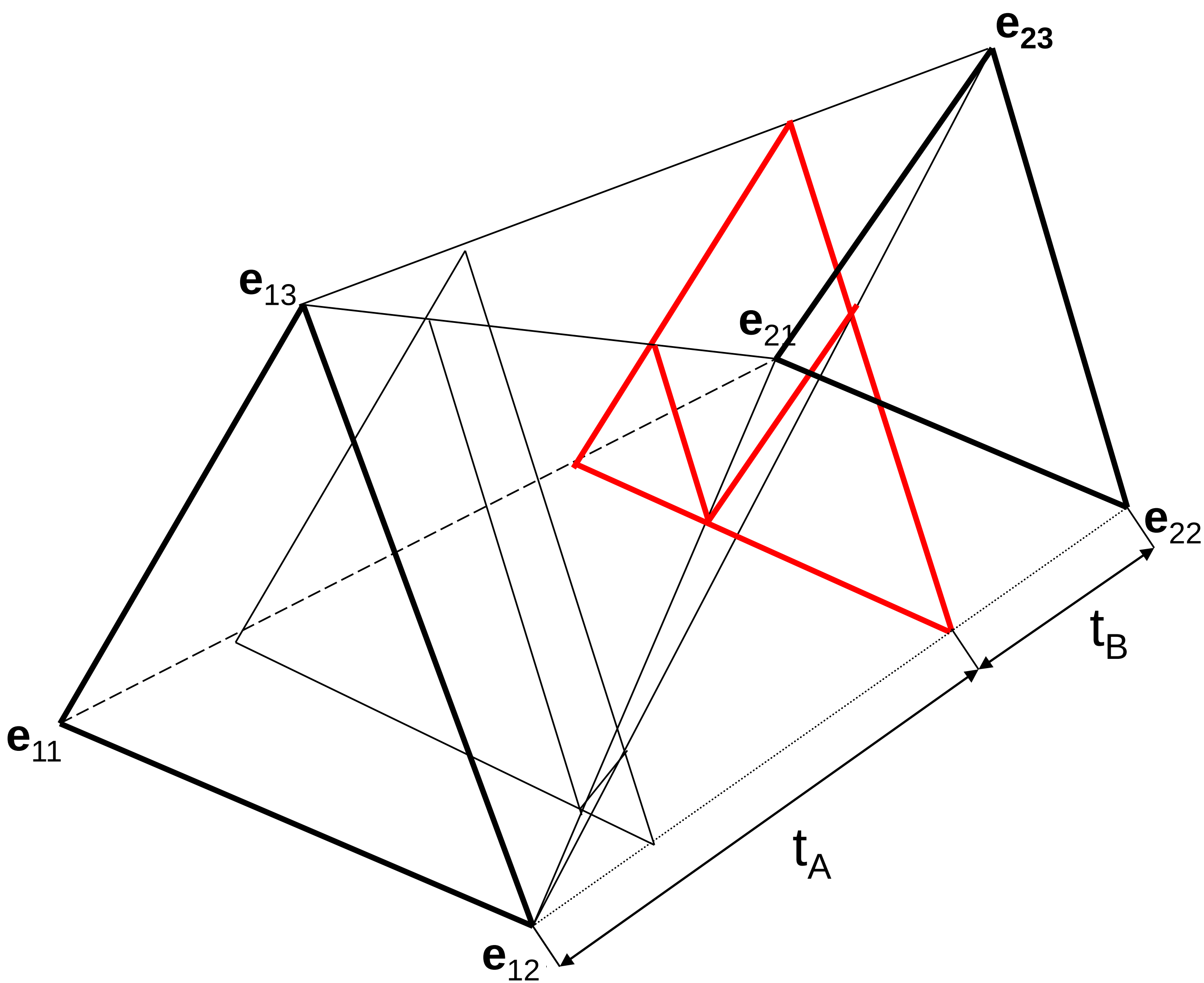
- 上は賃金率Δのモード分割。
  - 対応する生産可能集合はどうなるか
- McKenzie(1954b)のダイヤグラムには計量性質を導入できる:Minabe(1995)
- どう構成するかの説明がなかった。
- Subtropical-tropical転換した後にCaley Trickを用いれば、McKenzie-Minabe Diagramが得られる。

McKenzieの第2図

McKenzie(1954b) p.174.

注意:こちらは各生産物が頂点。





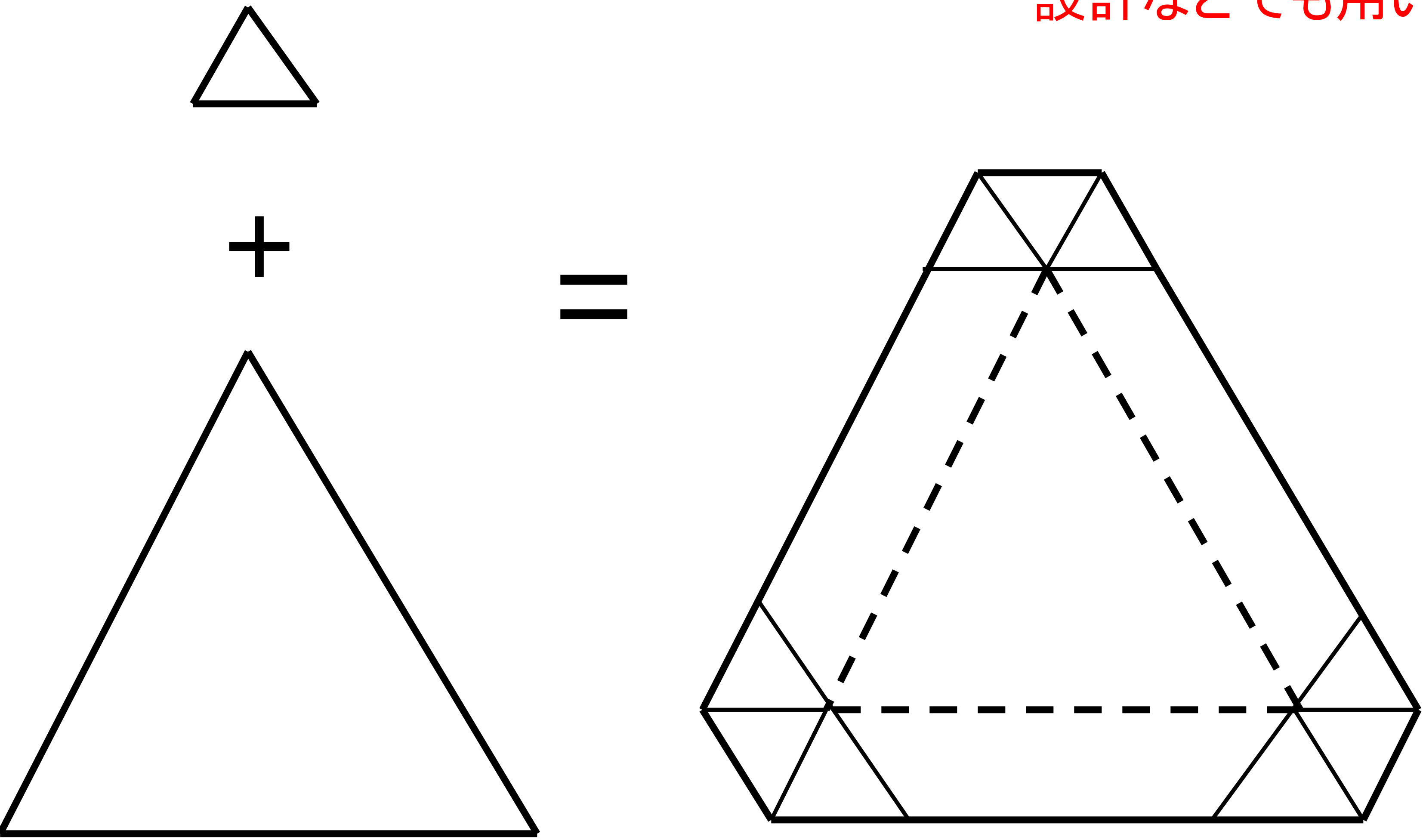
Cayley trickによる$2\Delta^2$細胞分割

世界の生産可能集合(フロンティア)

- 賃金率Δの各内部頂点にひとつのプリズムが対応
  - プリズム　$\Delta^{d1} \times \Delta^{d2} \times \cdots \times \Delta dk$
  - Δ^{d} はd次の単体(高次の正四面体)
  - $d_1 + d_2 + \cdots + d_k = N-1$
- ひとつのプリズム(極大面)にはひとつの価格ベクトル$p=(p_1, \ldots, p_N)$と賃金率ベクトル$w=(w_1, \ldots, w_M)$が対応。

Minkowski和

ミンコフスキー和はロボット設計などでも用いられる。



価格Δのモード分割

- 賃金率Δから出発する代わりに
- 価格面での条件:

  $p1 = \max$

トロピカル凸幾何学の同値定理(双対)

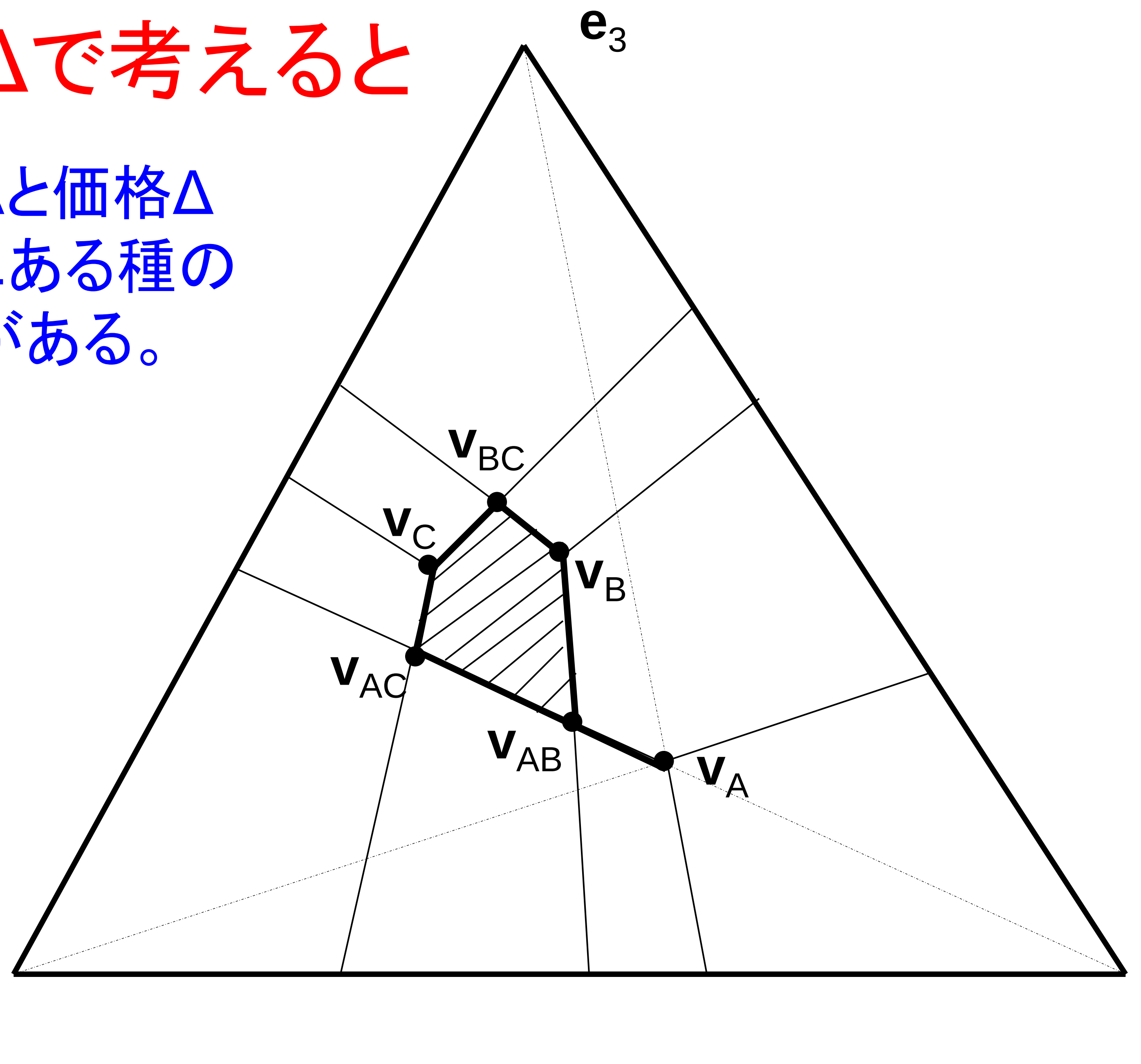
価格Δにおいて

- 各国の競争的頂点$Y_j = (a_{j1}, a_{j2}, \ldots, a_{jN})$が張る凸集合(サブトロピカルの意味で)
- 一次結合$b_{1j}y_1 \oplus b_{2j}y_2 \oplus \cdots \oplus b_{Nj}y_N$ のトロピカル超平面たちで区切られるΔのモード分割の有界要素の点集合
- Δのモード分割の各要素のfine typeが被覆的(spanning、各行各列に要素をもつ)であるもの点集合

は一致する。

価格Δで考えると

賃金率Δと価格Δ
との間にある種の
双対性がある。



残された問題

- リカード経済からリカード・スラッファ経済へ
  - McKnzie(1954b, p.179) の注意
  - 貿易される投入財>塩沢(2007)、Shiozawa(同)
- ほかに？

結論

- まだまだおもしろい性質が埋もれている。
- 「リカード経済=サブトロピカル凸幾何学」を用いると、組合せ幾何学の多くの知識がリカード経済に適用できる。

References(1): Max-plus関係

- Cuninghame-Green, R.A. 1979 Minimax Algebra, *Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems*, Vol.166, Spinger.
- Gaubert, S. 1998 Two Lectures on Max-plus Algebra, on WWW.
- Heiedgott, B., G.J. Olsder and J. van der Woude 2006 *Max Plus at Work*, Princeston University Press.
- Kolokolsov, V.N., and V.P. Maslov 1997 Idempotent Analysis and its Applications, Kluwer Academic Publishers.
- Litvinov, G.L. 2005 The Maslov dequantization, idempotent and tropical mathematics: a very brief introduction, in Litvinov and Maslov (Eds.) *Idempotent Mathematics and Mathematical Physics,* AMS.

References(2):リカード貿易論関係

- Ethier, W.J. 1999 Jones and Trade Theory (Profile). *Review of International Economics* **7**(4):764-768.
- McKenzie, L.1954a On Equilibrium in Graham's Model of World Trade and Other Competitive Systems, *Econometrica*, **22**(2）: 147-161.
- McKenzie, L. 1954b Specialization and Efficiency in World Production, *Review of Economic Studies*, **21** :147-161.
- McKenzie, L. 1955 Specialization in Production an the Production Possibility Locus, *Review of Economic Studies*, **23** :56-64.
- Jones, R.W. (1961) Comparative Advantage and the Theory of Tariffs; A Multi-Country, Multi-Commodity Model, *Review of Economic Studies,* **28**:161-75.
- Minabe, Nobuo 1995 *Production and International Trade*, Economic Studies Association, Otemon Gakuin University.
- Shiozawa, Y. (2013) Subtropical Algebra as the Ricardian Theory of International Trade, to appear in ArXiv.org.

References(3):トロピカル数学

- Mikhalkin, G. 2001 Amoebas of algebraic vaireties, arXiv:math.
- Richter-Gebert, J., B. Sturmfels, and T. Theobald, 2005 First stetps in tropical geometry.
- Maclagan, D. and B. Sturmfels 2009 *Introduction to Tropical Geometry* (preprint)
- Develin M., and B. Sturmfels 2004 Tropical Convexity, *Documenta Mathematica* **9**:1-27.
- Santos, F. 2005 The Calyley Trick and Triangulations of Products of Simplices, *Contemporary Mathematics*, 151-177.