

Solitary wave の百五十年

2回連続の“その2”



鹿野忠良

1984年 12月

4. Stokes の 長い波

ストークスは、波高が“相当”小さい“長い波”
(h/λ : 小) を扱い、第一近似として線型波
動方程式を得た。

次に、第二近似として、

$$(4.1) \quad y = a \cos mx - \frac{3a^2}{4m^2 h^3} \cos 2mx$$

を得た (p.454), ここに a : 波高 (波の α),
 h : 水深, m はモード数, $m \sim 1/\lambda$, λ : 波長,
である。伝播速度 c は

$$(4.2) \quad c^2 = \frac{g}{m} \tanh(mh), \quad a \text{ は独立}$$

こうして ストークスは 波高に依らない伝播速度の
二次近似が、ラッセル理論の正しさを示唆
することを主張した。

勿論 ストークスは、エプリー理論と一見矛盾す
る c の二次近似について注意を払、そして、上に
いった“相当小さい”波高とは何かを説明し
ている。すなわち、(4.1) が ある種の展開——フー
リエ展開に似た——がある以上、第二項の係数は
 a に比べて小さくなければならない、すなわち
 $a/m^2 h^3$ が小さくなければならない。これを
いかなおせば :

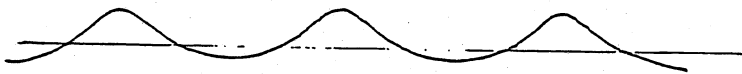
$$(4.3) \quad \frac{a}{m^2 h^3} = \frac{a}{h} \left(\frac{1}{m h} \right)^2 \approx \frac{a}{h} \left(\frac{\lambda}{h} \right)^2 = \frac{\varepsilon}{\delta^2} \ll 1,$$

がある, ただし 最後の項は $\delta = \frac{h}{\lambda}$, $\varepsilon = \frac{a}{h}$ (前者は a ではなく α を, 与えて, 用いた) という $\delta \ll 1$ の定義による. 従って $\delta \ll 1$ の ε の場合は特に問題もない. エプリーは "長い波" と, $\alpha > 1$ に区別される "長い波" として, 波高に関係しない速度 $a =$ 近似が与えられた, というわけである.

次手ながら ストークスは 更に "展開" をすすめて, 第 3 次近似として, 深い水の場合の波の形:

$$y = a \cos mx - \frac{1}{2} m^2 a^2 \cos 2mx + \frac{3}{8} m^4 a^3 \cos 3mx$$

を与えている. 下の図は ストークスの論文をまとめたもの
 であるが, これは後に
 "highest wave の問題"
 という別な一章をなすこ
 とになった. 3行-ソフ
 の研究からつづいて,



二年前前に 完全な理論ができたことを, 直島英昭
 が, 1982年 信州大学での研究会で サークーイェルに
 話したことがあるが, ここでは 深入りしない. た
 だ, (4.3) の関係を ストークスが 表に出した
 という点が, 本稿の展開には重要である.

5. 中間的まとめ.

IXとa § 3, 4 から, 依然 § 2 にa へた ラッセル
a 波を理論的に説明する事は出来ないまでも, 有
限振幅の波 ("長い波", は当然 仮定12) の伝
播速度は必ず波高に依存するわけでは無い事
が考えられる様になった. すなわち, エプリーカ
§ 1 にいう (B):

$$(B) \quad \delta = \frac{a}{\lambda} : \text{有限}, \quad \frac{\alpha}{a} : \text{有限}$$

だけで "長い波" を特徴づけようとしたとすれば,
ストークスは

$$(C) \quad \delta = \frac{a}{\lambda} : \text{有限}, \quad \varepsilon = \frac{\alpha}{a} : \text{有限}, \quad \text{しかも}$$

$$\frac{\varepsilon}{\delta^2} = \frac{\alpha \lambda^2}{a^3} : \text{有限}$$

にある "長い波" を考え, この時は "有限振幅
a 長い波" といえども, 波高に依らない速度 $a = 2c$
近 IX が示す, ラッセルの solitary wave も, エプ
リー理論だけからして, 必ずしも "抹殺" されるわけ
でもないことをうかがわせる。

この "発見" は, "ストークスの長い波" の理論, あ
るいは, いわゆる "長い波のパラドックス" の歴史
の上で, 第一の決定的一歩であった。

6. ブシネスク (Boussinesq) の "長い波"

§2 a 1 はじめにあげた論文の前身をなす Comptes Rendus の 1-19 中で、ブシネスクは、自分の研究の目的が スコット・ラッセル が発見した 孤立波 に対する 理論的根拠 を提出するにある事を明確に言っている (1871)。

$\zeta = \eta - h$ が小さい, そのような "長い波" に対し, 線型波動方程式を第一近似とし, 第二近似 (井) (§1) から ブシネスク が導き出したのは 次の方程式である:

$$(6.1) \quad \zeta_{tt} - gh \zeta_{xx} = gh \left(\frac{3}{2h} (\zeta^2)_{xx} + \frac{h^2}{3} \zeta_{xxxx} \right)$$

この方程式は, 導函数と共に遠くで急減少する特殊解として $\text{sech}^2 X$ で表される solitary wave solution をもつことは, よく知られている。

このような "美しい" 非線型方程式が 2 次近似としてみちびかれ, 形が "美しい" のみならず, 形をかえることなく伝播する解をもつ事実は 学界に与えたインパクトは大きかったはずだが, 頭着に我々にはみえるのは, レイリー卿の反応である。後年, レイリー卿は, 孤立波の存在を理論的に証明する事は 4 疑念的になったといた Lord Rayleigh が, Korteweg-de Vries の仕事をみえ豹変し, 希望

をもつたおした、なにか §2 冒頭にあげた論文の中で“からか、て”いるが、これはいささか不当であらう、1876年 solitary wave の可能性に対する、一つの理論を提起している(レイリー卿)。

筆者はこれを Boussinesq の仕事への“反応”と書いたが、レイリー自身は、ブシネスクの仕事を知らなかった、とかいっているから、これもまたレウイ・テウイタ同様に筆者の誤解かもしれない。仮にそうであったにしても、1870年代から90年代にかけて、ラッセルを支持する“理論”が頻々として出て来たことは事実で興味深いことである。

レイリー卿の仕事は次節で述べるとして、ブシネスクの方程式について、二つ注意しておく。

(1) この方程式は分散関係が与えられる。すなわち、函数解析的な発想からして、ブシネスク方程式に対する初期値問題を考えると、適当でない、のである。

(2) ブシネスクは上の方程式に到達する前に、本質的に、下の方程式を二次近似として得ている：

$$(6.2) \quad w_{tt} - w_{xx} - \frac{1}{3} w_{xxxx} + (w_t w_{tx} + 2 w_x w_{tx}) = 0$$

そして、一方向に伝播する波、を仮定することによって、“二次近似”：線型波動方程式の解で、非線型項の w_t を“近似”、すなわち

ち ω_2 がおきかえ, (6.1) を得ている。(6.2) は 無次元化した形 であるため $c^2 = g h$ の 1 に 正規化されているが, 本質的に, 上述の集な事情 にな, ている。

注意すべきは, (6.2) も solitary wave solution がある 進行波 解をもつし, また, 偏微分方程式として "良" 性質" ももつ ことにある。そして, 意味で (6.2) こそ 本質 フォルテス方程式 とよぶ, べき もあることを, 我々は KN. 3 (§1) の 中で, 数学的に 正確に 論じた。

7. レイリー卿の solitary wave の理論

レイリーは, 速度ポテンシャル $\varphi = \varphi(x, y)$ が 調和函数 であることから, $x + iy$ の 正則函数 として 出発 することにした。すなわち

$$(7.1) \quad \varphi + i\psi = F(x + iy) = e^{i\frac{d}{dx}} f(x)$$

から 出発する, ここに ψ は φ の 共軛調和函数, すなわち stream function である。コーシー-リーマン 方程式から, 複素速度

$$(7.2) \quad F' = u - i v$$

1. 次の様 1 = かける:

$$(7.3) \quad \begin{cases} u = \cos\left(y \frac{d}{dx}\right) f(x) = f - \frac{y^2}{2!} f'' + \frac{y^4}{4!} f^{(4)} - \dots \\ -v = \sin\left(y \frac{d}{dx}\right) f(x) = y f' - \frac{y^3}{3!} f''' + \dots \end{cases}$$

これから出発して定常問題を考え、ヘルムホルツ法則、すなわち水面における運動量保存則から、 y が x のいかなる函数であれ、

$$u^2 + v^2 = \omega - 2gy$$

に於て ω を一定に保つことがいままでの調べる問題に帰着させた、ここに水面の圧力 p とした時、ヘルムホルツ法則を

$$-2 \frac{p - c}{\rho} = 2gy + u^2 + v^2, \quad g: \text{重力}$$

と書いた時、左辺を ω と表している。
他方

$$(7.4) \quad u^2 + v^2 = (1 + y'^2) u^2$$

であるから、境界条件（遠方の牽動）をうまくつけて y のみたすべき方程式として

$$(7.5) \quad y'^2 + \frac{3}{l^2 l'} (y - l)^2 (y - l') = 0$$

をみちびいた。ここに h は 静水状態の水深 (乃至は平均水深), h' は 波の頂点から (平均な) 水深まで距離である, 且つ (7.3) を用いる時あるわけは三次以上の項を捨てている。

(7.5) が Russell の発見した本来的な孤立波をもたせしめる解をもつことは、すぐわかる。

そこで, (7.1) の右辺, (7.3) の解がなければならない。事實上 (7.3) は、調和函数 ψ, χ を $y=0$ で展開したものにすぎないが、水の表面 $y = \eta = h + \zeta$ に到らないかきり意味はあきらかである。

しかし水面において、すなわち y を x の函数として (7.4) から (7.5) へ、(7.3) を用いてすゝむことは、理論的には簡単なことではない。結果に於てレイリーの形式的な計算が正しいことは、我々が KN.2 に於て証明した フリードリックス展開の数学的正しさにもとづいて、はいめえ示されることである。

すなわち、§1 に於て、(4) の解の存在とパラメータ δ に関する無限回の微分可能性を KN.1 - KN.2 で示したことをのべてたが、(7.3) に於て y は水面に於ける値 $y = \eta(t, x)$ を代入した時、この $\eta(t, x)$ もまた、パラメータ δ に関する漸近展開をもつことを用いて、 δ に関する高次の項を右辺にまわして、いかに、(7.5) のせりに

$$Y'^2 + \frac{3}{e^2 e'} (Y-e)^2 (Y-e') = O(\delta^4)$$

ともかくべき近似方程式が、得られるというのである。

“フリードリックス展開”のことを説明する事が後にまわすための論理が、ギクシヤクするが、要は、KN.2-KN.3 に於て既に述べたが、解がパラメータ δ について無限回微分可能なことを保証し、しかもポテンシャルの、水底に於ける値を利用することによって非定常問題に於て“長い波”の近似方程式 = フシキスク方程式をみ出した方法が、レイリーによる formal に用いられていることを注意したいのである。

さて、いよいよここぞ、“long wave paradox” (と後にいわれるようになる問題) になり、敬厚的に厳密な議論をしないかぎりもうどうにもならないと思わせる、長い問題提起を行って Konteweg-de Vries の仕事をあげる順番が来た。前も、一言すれば、非定常問題を扱ったいまではフシキスクの流れをくみ、他方時間 t について一階の方程式を近似としてみちびいたという点では、(7.5) に際して、レイリーの発想にもつながり、というべき仕事である。

8. Korteweg - de Vries の方程式, 1895年

手許にある二人の論文は アンリ・ポアンカレ研究所で
 いった コセーニ であるが、日本では 殆ど、東北大学
 図書館蔵に、1895年の Philosophical Magazineが
 あると思われ。少なくとも、Rayleigh の論文が
 あっている 1876 年 9 号は、そこにある。

K-dV. の二人は、ストークスが注意した関係
 (C), p.34, に注意を払いつつも、基本的には レイリー
 の考えに基づいて議論を展開している。ただし、ほじ
 めかき unidirectional, 一方向に伝わる波のみ
 を考察の対象にすることをいっている。問題は
 はしかし、レイリーとちがって非定常である。

ストークスによる ポテンシャル, stream function
 の展開式 (7.3) を用い

$$(8.1) \quad \eta = \eta_0 + \eta_1, \quad \zeta = \zeta_0 + \zeta_1, \quad c = \sqrt{g h}$$

で定義せられ η_1, ζ_1 : η_0, ζ_0 に対して

に対する方程式を求めよう。

水面における方程式 (H), p.6, (7.3), (8.1)
 を代入し、一次近似

$$(8.2) \quad \begin{cases} \eta_t + c \beta x + g \zeta_x = 0 \\ \zeta_t + c \zeta_x + h \beta x = 0 \end{cases}$$

を得る。ここから

$$(8.3) \quad \beta = -\frac{c}{h} (2 + \alpha), \quad \alpha \text{ は任意の定数,}$$

が、この方程式をみたすことを知る。

次に、二次近似を求めるために、 α がある値に ϵ により近い値があることを次のように“仮定”する：

$$(8.4) \quad f = c - \frac{c}{h} (2 + \alpha + \epsilon).$$

これを式(8)に代入して次のを得る：

$$\begin{cases} \frac{c}{h} \eta_t + q \eta_x - \frac{q}{h} (2 + \alpha) \eta_x - \sigma \eta_{xxx} = 0 \\ \frac{c}{h} \eta_t - q \eta_x - \frac{q}{h} (2\eta + \alpha) \eta_x + \frac{h^2 q}{6} \eta_{xxx} = 0, \end{cases}$$

$$(8.5) \quad \sigma = h^3/3 - \frac{\pi h}{\rho q}, \quad \pi \text{ は表面張力係数.}$$

上の方程式から η_x を消去して、有名な K-dV 方程式が得られた：

$$(8.5) \quad \eta_t = \frac{3}{2} \frac{c}{h} \left(\frac{1}{2} \eta^2 + \frac{2}{3} \alpha \eta + \frac{1}{3} \sigma \eta_{xx} \right)_x.$$

さて、前頁に、“(8.4)を(井)に代入して、次を得”と簡単に書いたが、勿論“高次の小さな量”をすべて“二次近似”をとった、と9 = 2の方程式が得られる、といういふ点がある。K-dVの1次元脚註に於て

$$\left. \begin{aligned} 2x \cdot 2xx, (2x)^3 & \text{は } 22x \text{ より小さいと、} \\ c_t, 2xxc \dots \text{の項は } 2c \text{ により小さいと、} \end{aligned} \right\}$$

する、と書いてある。我々は(井)-(A)による無次元化によつて、無次元パラメータ δ を物差として、すべての高次の小さな量を(井)としたが、K-dVの判断にいさかかも正しいかないことに目を醒めた。

実際、我々は $KN \cdot 1 - KN \cdot 2$ に交えられ、 $KN \cdot 3$ に於て、水面におけるポテンシャルの値をパラメータ δ に関して展開し、(8.4)に相当する式を与え、そこにあるかわる項を δ の1次、2次、3次と比べ、 $O(\delta^4)$ の項をすべてによつてK-dV方程式を得る(§1の“結論”参照)。従つて、我々の $KN \cdot 3$ に於ける解析は、数学的には厳密であり、また定量的な議論は素人にも自明となる方程式を与えている。他は、思想的にはK-dVを一步も進めないといふ言われとも矛盾を得ない程である。

9. Solitary wave の存在 — 数学的理論のはいり

レヴィ-チヴィタ Levi-Civita は、等角写像を用いて、periodic permanent waves の存在を、はいりて数学的に証明した。

二次元流の場合、流体（水）が占める領域は、ガウス平面上の単連結領域として扱われるから、複素速度ポテンシャル $F = \varphi + i\psi$ はこの領域に於て $z = x + iy$ の正則函数であり、水面 $y = \eta$ は正則函数の境界値である。

適当な領域に上記の水の領域を等角に写し、境界が φ と ψ がみたすべき方程式 (井), p. 6, によって具体的にこの等角写像を特定する、という形の問題がとかれる。

パラメータ $\mu \sim \sqrt{\lambda}$ を導入し、逐次近似によって、十分小さい μ の値にまで収束する級数の形の解が与えられている。

レヴィ-チヴィタ は水深が無限大の場合に問題をこいたが、ストリエフが、それを、有限の深さの場合に発展させた。

この方向を更にいかめし、ラッセルの — あるいは、フシキス、レイリー、KdV の — solitary wave は、これらの periodic permanent wave の、波長が無限に長くなった極限にある。

るとして、はいめ2 solitary wave の存在を数学的に証明したのは ラヴレンティエフ Lavrentiev であり、ついで フリードリヒス と ハイパーズ による別の証明が Comm. Pure Appl. Math. に発表されたのは、レヴィ・チヴィタ から、約 30 年後のことである。

こうして定常問題に関するかぎり、ラッセルの発見以来 120 年たつて、solitary wave の可能性は数学的な解決を見た。

注意 Friedrichs-Hyers の方法を非定常問題に対して拡張し、K-dV 方程式を近似方程式として数学的に正当化しようとする研究が、最近発表されている。

R. L. Sachs : SIAM J. MATH. ANAL.
vol. 15, No. 3, 1984, May.
pp. 468-489.

然しながら、エプリー理論との関係が数学的に解明されるのは更に 25 年以上たった後のことである。

10. 浅水波 — フリードリックス展開

海軍との関係もあった様だが、戦時中からの研究の積かせぬがどっと出された形で、Comm. Pure Appl. Math. の第一巻(1948年)は流体力学特集であった。

その巻頭を飾った J. J. Stoker の論文は、後年大著 "水波 — 数学的理論及应用" に発展するが、この 87 頁に及ぶ論文の最後に、フリードリックスによる数 10-4 の付録がある: On the derivation of the shallow water theory.

この中でフリードリックスは、水面波の方程式(II), p. 6, から, "浅い水の波"を記述する第一近似として、略 100 年前にエアリーが得ていた方程式(I), p. 5, を、形式的に、しかし非常な明解をもってシステムティックにみちびいてみせた。

フリードリックスは、ポテンシャル φ , 水面の形を与える η に、下の様な展開を仮定する:

$$(10.1) \quad \begin{cases} \varphi(t, x, y) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \varphi^n(t, x, y) \delta^n, \\ \eta(t, x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \eta^n(t, x) \delta^n \end{cases}$$

ここに δ は、我々が先に定義した δ をもって $\delta = \delta^2$, とかける。そして、各係数 φ^n, γ^n は δ に依存。

このとき実は、 $\{\varphi^0, \gamma^0\}$ は (γ^0 は当然だが) γ には無関係で、下の方程式をみたす:

$$(10.2) \quad \begin{cases} \varphi_t^0 + \frac{1}{2}(\varphi_x^0)^2 + \gamma^0 = 0 \\ \gamma_t^0 + (\gamma^0 \varphi_x^0)_x = 0. \end{cases}$$

これがいわゆる浅水波方程式である。第一式を x で微分して $\{u^0 = \varphi_x^0, \gamma^0\}$ について方程式にすれば

$$(10.2)' \quad \begin{cases} u_t^0 + u^0 u_x^0 + \gamma_x^0 = 0 \\ \gamma_t^0 + u^0 \gamma_x^0 + \gamma^0 u_x^0 = 0 \end{cases}$$

を得、これが (I), あるいは (I)', に他ならない。

こうして フリードリックスは、100 年来 試みられて来た浅水波方程式の導出に基いて、"浅い水", "長い波" 等の仮定の下にいわゆるまた、 ϵ の量が小さいのかを測る尺度として パラメータ $\delta = \epsilon / \lambda$ を与え、(10.1) の展開を提案する事によって、議論の枠組を明確にしたのである。

フリードリックスはこの展開(10.1)に註をつけて、
級数展開であるか、あるいは漸近展開である
か、このような展開の可能性が証明される事は
数学的に非常に興味深い、と云っている。何故か
なら ——— 彼はつけてる ———, 第一に、それは
(エプリー)の波の方程式に対する数学的正当
化を与える。第二に、偏微分方程式論から言え
ば、楕円型の問題を、双曲型の問題を解く
ことにより、近似させる、ということになる。
すなわち、双曲型方程式(10.2) - (10.3)が、 $O(\delta^2)$
の誤差で

$$(10.3) \quad \begin{cases} \delta^2 \varphi_{xx} + \varphi_{yy} = 0, & 0 < x < \gamma(t, x) \\ \varphi_y = 0, & y = 0 \\ (4), p. 12, \end{cases}$$

を解くのである。

こうしてフリードリックスは、エプリー理論を数
学的に説明する方向として、我々がフリードリッ
クス展開と云っている(10.1)を提案する事で、
決定的な一歩を踏んだ。

解析函数のクラスで、しかも局所時間に関
してあるけれども、フリードリックス展開が正しい
ことを証明し、今世の“長い波のパラドックス”を
“解体”した我々の仕事について、少しにだけし
ておきたい。

ここで我々は、浅水波方程式に対する数学的正当化を最初にあたえた オウシヤニコフ Ovsjannikov の仕事について述べなければならぬ。彼は、フーリエ・リックス展開の第一項を用いては無く直接に、(9)の解が、もっと正確には(10.3)の解が(10.2)の解によって近似されることを示した。

11. 浅水波方程式の数学的正当化 — オウシヤニコフの理論

まず文献をあげてみよう：

L.V.Ovsjannikov: To the shallow water theory foundation, Arch.Mech.

(Varsovie), 26(1974), 407-442.

————— : Cauchy problem in the scale of Banach spaces and its application to the shallow water theory justification, Lect. Note in Math., Springer, n°. 503(1976), 407-422.

その他に、存在定理については：

V.I.Nalimov: A priori estimates of the solutions of elliptic equations with application to Cauchy-Poisson problem, Soviet Math.Dokl., 10(1969), 1350-1354.

L.V.Ovsjannikov: A non-linear Cauchy problem in a scale of Banach spaces, Soviet Math.Dokl., 12(1971), 1497-1502.

オウシヤ=コフの仕事について, フリードリックス展開の
件を別にしても, 更に = のことを注意する必要
がある:

1°. オウシヤ=コフは $\varphi = \varphi(t, x, y)$, $\gamma = \gamma(t, x)$ に変換し:

$$(11.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \delta^2 \varphi_{xx} + \varphi_{yy} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad 0 < y < \gamma(t, x) \\ \varphi_y = 0, \quad y = 0 \\ \delta^2 (\varphi_t + \frac{1}{2} \varphi_x^2 + \gamma) + \frac{1}{2} \varphi_y^2 = 0 \\ \delta^2 (\gamma_t + \gamma_x \varphi_x) - \varphi_y = 0 \\ \varphi(0, x, y) = \varphi_0(x, y), \quad \gamma(0, x) = \gamma_0(x) > 0 \end{array} \right. \quad y = \gamma(t, x)$$

であるが, $\delta \perp$ の病を (4), p.12, を得
るが = p.11 のあたりに似た無次元化によ, 2
(#) - (B) は, (4) をみちびいたのとちが, 2,
オウシヤ=コフは (#) に変換し,

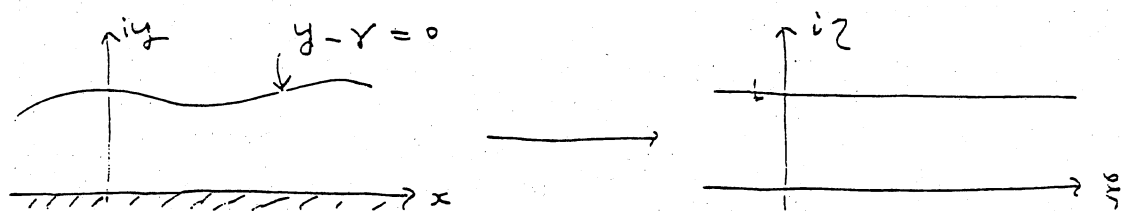
$$(11.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} x = x', \quad y = \delta^2 y', \quad t = \frac{t'}{\delta} \\ \varphi = \delta \varphi', \quad \psi = \delta^3 \psi', \quad \gamma = \delta^2 \gamma' \end{array} \right.$$

のスケーリングから (11.1) を得ていること。従, 2
 $\delta \downarrow 0$ の極限のいみは, そこで極限として
清水波オウシヤ=コフが形として得られること, 及,
解も収束 (37 について) すること, をいみしている,

我々 (あるいは フリードリックス) の考察において $\delta \downarrow 0$ は $\epsilon/\lambda \rightarrow 0$ をいみするから, 極限に対して, エプリー 9 時代化の "長い波", あるいはそれを "大きな" (波高のことはないが) 波と思えば, その波に 比べた水は "浅い" といういみで "浅い水の波" としての解釈もつけられ, いまはか 趣をこえていっていること。

2°. オウシヤ = コフは 初期条件 $\{\varphi_0, \psi_0\}$ が 周期的 である場合, すなわち, 周期的な (空間的に) 波の場合を扱ったこと。

問題を, Levi-Civita の 様には, 複素平面にうつして, 等角写像を決定する問題に帰着する:



$$z = x + iy = z(t, \zeta), \quad \zeta = \xi + i\eta$$

この等角写像による $\varphi = \varphi(t, x, y)$ の (象) を $\phi(t, \xi, \eta)$ とかくことにすれば, (11.1) の 第三, 四章目, すなわち水面 $y = \psi(t, x)$ でみたさるべき $\{\varphi, \psi\}$ の関係は, $\zeta = \xi + i\eta$ 平面における $x(t, \xi, \eta)$ と $\phi(t, \xi, \eta)$ の $\eta = 1$ における方程式として下の式に

に かける :

$$(11.3) \quad \begin{cases} x_t = \frac{A_\delta x_\xi \cdot A_\delta \phi_\xi}{x_\xi^2 + (A_\delta x_\xi)^2} - x_\xi \cdot B_\delta \left(\frac{A_\delta \phi_\xi}{x_\xi^2 + (A_\delta x_\xi)^2} \right), \\ \phi_t = -A_\delta x + \frac{1}{2} \frac{(A_\delta \phi_\xi)^2 - \phi_\xi^2}{x_\xi^2 + (A_\delta x_\xi)^2} - \phi_\xi \cdot B_\delta \left(\frac{A_\delta \phi_\xi}{x_\xi^2 + (A_\delta x_\xi)^2} \right), \end{cases}$$

こゝに A_δ は 正則函数の境界値の虚部から虚部を定める作用素, B_δ は, 同様に, 虚部から実部を定める作用素であり,

$$(11.4) \quad \begin{matrix} A_\delta u & \xrightarrow[\delta \downarrow 0]{} & u_\xi \\ \delta B_\delta v & \xrightarrow[\delta \downarrow 0]{} & \int_\xi^\zeta v(s) ds \end{matrix}$$

の様な性質をもつ。

上の (11.3) から $\{v = x_\xi, u = \phi_\xi\}$ に対する方程式を得る。 B_δ, A_δ の性質から, これが準線型の方程式であることを示し, こゝに, オウ"シャ=コフカ, はいぬい= (5.11.9) おけた論文の中で 自ら改良しておいた コーシー・コワレフスキーの定理を応用して, この準線型系のコーシー問題を解くことができる。

しかも, パラメータ δ に関する一系評価

が $\delta \in [0, 1]$ に関する限り得られ、その結果、 $\delta \downarrow 0$ の極限として、流れ方程式をみちびくことが出来る。

しかし、まさに、この δ に関する一様評価を示すについて、オウシヤ=コフは、先に注意した、周期函数の仮定を必要とした。それは (11.4) における B_δ の性質からわかる

$$B_\delta(1) \sim \frac{\delta}{\delta},$$

9 様な 特殊な性質が せられなければならない、求むるべき一様評価が困難なからである。しかし問題は、オウシヤ=コフが用いた、自分の型の一般化した非線形型ユーシー・コワレフスキ-の定理に用いる評価 (iteration を保障する) の型にも関する。

西田孝明は、オウシヤ=コフ流及ニレンベルグ流のユーシー・コワレフスキ-の定理の一般化を改良して、素人にも使いやすい形にした。これと合せて、Woods の本に学んで、ユーシー積分公式に他ならない A_δ, B_δ の性質の証明を田名研究から、 $\delta \downarrow 0$ における KN-1-3 に求められた結果が、オウシヤ=コフの出会いの困難をこえて、得られた：

L.C.Woods: The theory of subsonic plane flow, Cambridge Univ. Press, 1961.

12. 「長い波のパラドックス」に対するアセルの見解

前節まで来ると、ようやく 我々は、エプリー理論
及 孤立波の理論が夫々に 数学的な根拠を
持つことを知ったのである。

しかし、そこから一歩すすんで、二つの「理論」
の 開りを知り、なにが両者を区別するものなる
かを明らかにするには、アセルの役割は果たせ
ないものであった。

アセルは、§24 はじめ、p.24, にあげた
1953年 の論文の中で、「長い波のパラドックス」と
は何であるかを これ以上は 明確に説明
し、それを解決する方向を、同時に、示唆した
のであった。

彼の思想を一言でいえば、687頁にか
かれてある通り：

$$\epsilon/\lambda \ll 1, \quad \alpha/\epsilon \ll 1$$

なる条件から導びかれる (近似) 理論が
単一であるべきだ、という考えだが、全体的に混同の
源である、というのである。

それを敷衍すれば、 $\epsilon/\lambda \ll 1$, あるいは
 $\alpha/\epsilon \ll 1$ が バラバラに 考えられるのではないな
くと、これらの条件下で

$$U = \frac{\alpha \lambda^2}{h^3}$$

の大きさが どれくらいあるのか、が、同時に、基本的なものである、とアセルは言う。

この論文による解析の意味から アセルに敬意を表して、この量を上の様に U で表し アセル数 と呼びたいのであるが、またこの U が、 δ^2 の残りが定義した無次元数 ε と δ により、

$$U = \frac{\varepsilon}{\delta^2}$$

と表せることに注意したい。

アセルの主張, claim, はこうである:

h : 水深に對し $\lambda \gg h$, $h \gg \alpha$ の時

(i) $U \sim O(1)$ の "長い波" : (フーリエの方程式)
が一次近似

(ii) $\delta^2 \ll \varepsilon$ ————— : (エブリ—理論)
が一次近似

(iii) $\delta^2 \gg \varepsilon$ ————— : 共振型の長い波,

により、近似理論は、こくなる。(i), (ii) を

区別しないで一律に“長い波”とするところには“長い波のパラドックス”が生れる。

アセルは、この論文の内容が数学的に厳密な点では進歩していないことを認めるとい、しかもその上で、上にあげた考へたことすなわちその向を示していることを疑われないと仰げている。

ストーカは先にも引いた本“水と波”の中でこのアセルの主張を“反論”している、p.342。しかし、結論はすでに我々が§1にあげた通りであり、アセルの議論は奥に遠くまで及ぶものがある。

13. その後

存在定理については先にもあげたオウシニコフ、ナリモフの他にいくつかあるが、文献をあげるに及ぶ：

V.I.Nalimov : Cauchy-Poisson problem (russian), Dynamics of continuum, Siberian Institut of Hydrodynamics, URSS Akad. Nauk, 18(1974), 104-210.

Hideaki Yoshihara: Publ. RIMS Kyoto Univ., 18(1982), 49-96.
J.Math.Kyoto Univ., 23(1983), 649-694.

Shinbrot: Indiana Univ.Math.J., 25(1976), 281-300; 1049-1071.

Rogers: Naval Ord.Labo.NSWC/WOL/TR 75-43(1975).

Preprint, Illinois Univ., 1977.

ただ、このうちで ナリモフ と 吉原英昭の研究は
解析函数の枠をこえていること —— ソボレフ空間の
の存在定理 であることを 特筆に注意したい。

更に、ごく最近、この ナリモフ・吉原の研究に
まじり、ソボレフ空間において K-dV 方程式、
フネレス方程式の数学的正当化を試みた
大論が 出た (フレ フリット) :

Walter CRAIG: An existence theory for water waves, and the
Boussinesq and Korteweg-de Vries scaling limits,
Dept. Math., California Inst. Tech., 1984.

その他に、Euler 方程式ではなく、Navier-
Stokes 方程式の "表面波" を考へて、この分野
に於ける唯一の "大振幅解の存在定理" が
セーヴ、R. Beale によって示され、更に解の
decay を調べた Beale と 西田の共同研究
がある。

T. Beale: Arch. Rat. Mech. Anal., 84 (1984), 307-352.

2 完全積分可能系と関係

14. "長い"水面波の構造とKdV方程式'にかいて。

つまり §1 に於て, "長い" 水面波を近似する方程式' として, KdV 方程式' に対するひとつの数学的正当化が与えられたことをのべた。

三次元流に對しては, 同様の考察によつて, 後に "二次元 KdV 方程式" とも呼ばれる, Kadomtsev-Petviashvili の方程式' に對する一つの数学的正当化が与えられた:

$$\begin{cases} (u_t + uu_x + u_{xxx})_x + u_y u_y = 0, \\ u = u(t, x, y), \end{cases}$$

T. Kano : 三次元流の"長い"水面波を近似する
Kadomtsev-Petviashvili 方程式'
(to appear).

ところで, K-dV 方程式', あるいは KP 方程式' は, いわゆる "ソリトン理論" の大きなテーマである。KdV 方程式' の由来を知ると, ソリトン理論は流体力学の一分野である水面波の研究と深く結びついてもかけはなれた世界' にみえる。その
の構造

ために, "長い波" を近似する方程式であることが数学的証明も得た今とな, ともな, ここに KdV 方程式がでて来るのが, 強引なこいつけではないまでも, 稀有の偶然であるのが, いささか木に竹をついた"不審な感"がないわけでもない。

ところで, p. 18 1-に言う $\varphi_4|_{\varphi=\gamma}$ の, ハロウキータ

δ についての展開は任意の次数まで出来るのであり, p. 14 の方程式系は δ についての任意の次数まで展開される。従って, p. 19 において $O(\delta^2)$ まで"やめた"を, 更につづければ, $O(\delta^4)$, $O(\delta^6)$... 迄の "近似方程式" が得られる次第である。

この高次の "近似" 方程式の意味はなんだろうか? 少なくとも, 任意の N に対して $O(\delta^{2N+2})$ 以上の精度まで得られる方程式が "積分可能系" を与えるだろうか, という問題には答えなければならぬ。—— というのが常々 頭にた, いたことであつた。

この秋 (1984 年 10 月) の学会で青本和彦氏にまともにこの点を質され, いささか調べてみた結果わかつたことに一言ふれて, 本稿を締めくくりたい。

結論的に, 非常に大胆な予想をのべれば, p. 14 に記した ψ, φ に関する方程式系は, ソリトン理論にいう "KdV hierarchy"

の “重ね合せ” が出来ているのではないかと…。

$O(\delta^6)$ の項までしか、実際には計算せずに
 こうかくのは、まるで「1, 2, 3, … 沢山」という手続き
 がいそぎかえがひけるが、ともかくも、その手続きを
 1/2 の α へてみよう。

さらに、§1, p. 19 に書いた $\{\phi, \eta\}$ に
 ついての方程式の展開を更につかけると

$$\left\{ \begin{aligned} & \phi_t + \eta + \frac{\delta^2}{2} \phi_x^2 - \frac{\delta^4}{2} \phi_{xx}^2 - \\ & - \delta^6 \left(\frac{1}{3} \phi_{xx} \phi_{xxxx} + 2 \cdot \phi_{xx}^2 \right) = O(\delta^8) \\ & \eta_t + \phi_{xx} + \delta^2 \left(\frac{1}{3} \phi_{xxxx} + (\eta \phi_x)_x \right) + \\ & + \delta^4 \left(\frac{2}{15} \phi_{xxxxxx} + (\eta \phi_{xx})_{xx} \right) + \\ & + \delta^6 \left(\frac{17}{315} \phi_{xxxxxxxx} + (\eta^2 \phi_{xx})_{xx} + \frac{9}{10} \eta \phi_{xxxxxx} + \right. \\ & + \frac{5}{2} \eta_x \phi_{xxxx} + \frac{31}{12} \eta_{xx} \phi_{xxx} + \\ & \left. + \frac{6}{5} \eta_{xxx} \phi_{xx} + \frac{7}{60} \eta_{xxxx} \phi_{xx} \right) = O(\delta^8) \end{aligned} \right.$$

これから η を消去し ϕ に関する, ($t_1 = t_2$)

= 階の方程式になおし, 更に, $\{u = \phi_x, v = \phi_t\}$ に
 関する方程式系になおして, それを

$$2f = u + v, \quad 2g = u - v$$

で対角化し, f または g に関する
 方程式としてなかめなす。その結果, 次
 の様な方程式がえられる:

$$\begin{aligned} f_t - f_x - \delta^2 \left(\frac{3}{2} f^2 + \frac{1}{3} f_{xx} \right) x - \\ - \delta^4 \left(f f_{xx} + \frac{1}{2} f_x^2 - \frac{1}{2} f^3 + \frac{2}{15} f_{xxxx} \right) x + \\ + \dots = O(\delta^6). \end{aligned}$$

他方, ソリトン理論では, KdV hierarchy
 とよばれるものが, たいていは ϵ 階の
 方程式になる。

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} R_n(u), \quad u = u(t, x),$$

$n = 0, 1, 2, 3, \dots$, $n=1$ は $\frac{\partial}{\partial x}$ を 1 として
 表したとき

$$R_0 = \frac{1}{2}$$

$$R_1 = -\frac{1}{4}u$$

$$R_2 = \frac{1}{16} (3u^2 - u'')$$

$$R_3 = -\frac{1}{64} (10u^3 - 10uu'' - 5(u')^2 + u''''),$$

.....

である。 u の符号をおえれば, R_1 が $O(1)$, R_2 が $O(\delta^2)$, R_3 が $O(\delta^4)$ の項に ..., 繰り返り対応する非線形型項をもつことが見られる。

従って, もし任意の N に対して $O(\delta^{2N})$ の項までこの対応の成立, ことが示されるならば, 積分可能性は, solution 理論からただちにわかる, ということになる。

しかしながら, 反に ^{上の} 計算は コンピューターを 直ぐに 重負になり, 実行させたとしても, このプロセスから ϕ_4 の ϕ 方程式系, p.14, の大局的な構造を知る事が出来るわけではない。そういふ事をなすため, p.14 の ϕ 方程式系は 確かに

$$\phi_4 \mid y = 1 + \delta^2 z(t, x)$$

(の展開)を通してしか, (t, x) を独立変数とする偏微分方程式系としておきかえられないようにしている。

ともあれ、現時点に於ても、少くも KdV
方程式が "長い波" の近似方程式として
くることは偶然ではなさそうだと
いうことである。

逆にまた、ソリトン理論から得られた
高次 KdV 方程式の系列が、§1 に言う
(A), p. 10, をみたす様な "長い波" (水面
波) の高次の近似方程式として、数理論
理的に具体的な意味をもつ、—— とい
うことになるであろう。

今後の研究がどういう経過になるにせよ、
せしめたり、"長い" 水面波にはなお究明さ
れるべき "構造" のあることが想われる。

以上

12/déc/1984

Yamashina.