

# Solitary wave の百五十年

2回連続の“その1”



鹿野忠良

1984年12月

今崩れんとする大波の間に遠望される富士を描いた、北斎・富嶽三十六景のうち“神奈川沖へ浪裏”を知らない人はあるまい。が、鎌倉右大臣の歌はどうであろうか：

大海の磯もとせいに奔る波、われこ  
くたけと せけと するかも、

あるいは また：

箱根路をわか越えくれば、伊豆の海  
の沖の小島に波の奔るみゆ。

今では有名な J. Scott Russell\* が、その Report on waves\*\* の中で、今日 solitary wave とよばれている波をはいめて見た日を語る文章は中々感動的である。

\* J. S. Russell (1808-1882), スコットランドの造船技師。巨船 Great Eastern, あるいは 装甲駆逐艦 Warrior の設計者として知られている。

\* 1844. 英国学術振興協会 年会報告。たゞは、京大玉里、地金教室図書室 でみられる。

これもまた知らない人もないであろう“象を走見”(sans famille)には、岸を歩く馬につか

った横木をとりつけて運河を走る船がこぼれかちて  
 いる。運河を下っていたこの種船が突然とまった  
 時、船先にあふれかちた水が盛り上がり、今止った  
 船をはずれ、しだいに運河を流れ下り、その形に  
 Russell は強く注意をひかれ、馬上、二マイルに  
 わたって波の傾りをあふいた、という。

波は 30 フィート程の長さで、高さ 1 尺至 1.5  
 フート、時速 8-9 マイル、やすかつかう低くなっ  
 たけれど、殆んどその形をこぼれかち、運河が  
 曲がってしまった、海へ矢張りまで、1-2 マイルにわた  
 ってみるこぼれかち、と Russell は語っている。

.... I was observing the motion of a boat which was rapidly  
 drawn along a narrow channel by a pair of horses, when the boat  
 suddenly stopped — not so the mass of water in the channel  
 which it had put in motion; it accumulated round the prow  
 of the vessel in a state of violent agitation, then suddenly  
 leaving it behind, rolled forward with great velocity,  
 assuming the form of a large solitary elevation, a rounded,  
 smooth and well-defined heap of water, which continued its  
 course along the channel apparently without change of form  
 or diminution of speed. I followed it on horseback, and  
 overtook it still rolling on at a rate of some eight or  
 nine miles an hour, preserving its original figure some  
 thirty feet long and a foot to a foot and a half in height.  
 Its height gradually diminished, and after a chase of one  
 or two miles I lost it in the windings of the channel.  
 Such, in the month of August 1834, was my first chance

interview with that singular and beautiful phenomenon which I have called the Wave of Translation, a name which it now very generally bears; .... ( pp. 319-320, Report on waves, John Scott Russell, 1844).

奥朝がみたものは、今日 breaking of water waves とよばれているものであり、水の波がくたけち子不義に数学的に解析することは不可能（全く？）絶望的であるが、コンピュータ・シミュレーションによつて、美しい絵が描かれていく。

他方、Scott Russell が発見した孤立波 solitary wave への関心こそが、殆んど無限にわたる流体力学の諸対象の中で、水面波が、ある意味では過大な程のこびり付いた注意をひき、特に、ストークス (Stokes) レイリー (Rayleigh)、エアリー (Airy) 等の赫赫たる科学者達の知力を深く刺激し、数々の深い研究を生み出すにいたった動機の一つであると思われる。

今日なお、日本に於いては水面波（の研究）への関心が低いのは、奥朝・北斎的な美観の伝統に關係ありといふ牽強附会が非難をうけかねない。しかし、逆に、千変万化の波の海の中に、一種不動の局面として solitary wave に注目した英国（ラッセルはスコットランド人だが）の人の精神構造は、自然に対する“科学的姿勢”を深く象徴しているにちがいない。

コーニッシュ (V. Cornish, 1862-1948) の存在は、更にこの印象を強めるのに役立つ。種々の波の研究を中絶しないうちに、自分も、といった、海をかく

「美しい波をすくって、波をたづねて旅をする道を通  
 りたいけれど、それには何かある、た——コー＝マシユ  
 は、その著「海の波」(中公・自然叢書: 物理学)は  
 Ocean waves and kindred geophysical phenomena,  
 Camb. Univ. Press, 1934) の「序」にかいてある。

以下、孤立波 solitary wave の数理解物理  
 的解明をめぐって展開してまた、一世紀以上に  
 わたる水面波研究のその側面を、歴史的かつ  
 論理的に小りかえりておきたい。

# I 水面波 - 特には“浅い水”の“長い波”.

## 1. 'long wave paradox'

次々 = つの方程式(系) から決めるよう:

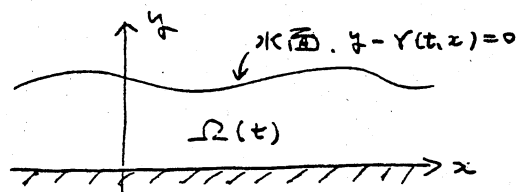
$$(I) \quad \begin{cases} u_t + u u_x = -g \gamma_x \\ \gamma_t + u \gamma_x = -(h + \gamma) u_x, \end{cases}$$

$$(II) \quad \zeta_t + 2\zeta_x + \zeta_{xxx} = 0,$$

ここに  $h$  は水深,  $g$  は重力加速度,  $u$  は  $x$  方向への流体の速度,  $\gamma$  または  $\zeta$  は, 水面の形を表す函数, すなわち  $\gamma - \gamma = 0$ ,  
あるいは  $\gamma - \zeta = 0$  が 水の表面を定義すると考へよう。

これ等は共に, 有限振幅の“長い波”を表す“近似方程式”で, もとの Euler の方程式から導き出されたものである。(I) はエアリー (G. B. Airy, 1801-1892) によつて, (II) は コルタウェグ-ド・ヴリース (Korteweg-de Vries) によつて, 夫々 1845年頃, 及 1895年頃, 提起された。

例として、長い真直ぐな運河に於て、流れは二次元的と考へられている。すなわち、垂直方向を  $y$  軸、流れの方向を  $x$  軸にと、 $t$  時、運河を横切る方向を  $z$  軸に直交する面とせば、この形の形は同じである、といふのである。



今、この流れに於て水面で成り立つべき速度ポテンシャル  $\varphi = \varphi(t, x, y)$  と  $y = \eta(t, x)$  の関係は、次の通りである、ただし粘性は無視し、非圧縮的であると、表面張力も無視してある：

$$(\#) \quad \begin{cases} \varphi_t + \frac{1}{2}(\varphi_x^2 + \varphi_y^2) + g y = 0 \\ \eta_t + \eta_x \varphi_x - \varphi_y = 0, & y = \eta(t, x). \end{cases}$$

このポテンシャル  $\varphi$  は、水が満たしている領域  $\Omega(t)$  における調和函数  $[(x, y)]$  であり、水底での導出、吸込がたいとすれば（硬い水底）、 $y = 0$  に於て  $\varphi_y = 0$ 。

今この“長い波”とは、従来、水深  $h$  に比べて波長  $\lambda$  が大きい；  $\lambda \gg h$ 、これを指し、そのいみで、長い波を考へる限り、水面における垂直方向の速度成分は、水平方向の速度成分  $u = \varphi_x$  に比べて非常に小さいはずであり、その微小量を無視することによって

(#) から得られた (エプリーによ. 2) 非線形型 の  
"近似"方程式 が (I) である。

他方, (II) の  $\gamma$  は, 図にいう  $\gamma$  ではない  
く,  $\gamma = \zeta + \eta$  也, 静止状態から水面の  
へだたり  $\eta$  も考へ, "長い波" の  $\zeta$  は  $\eta$  より  
大きな量である, といふ得られた方程式 — "近似"  
— である。

ここで,  $\gamma$  が, いわば = 種あるべきで, "混  
乱"している事に注意しよう。この混乱は, む  
しろ意識的なもので, それをいうのも, (I) の  
方程式が あいまいに かかれてゐることを注意  
したいためである。

後にいう不幸に, (I) と (II) は共に (#)  
からとれた"された 有限振幅の 長い波"のた  
めの "近似方程式" であるにもかかわらず, 決  
定的に異質のものである。今,  $\gamma$  は, 図に  
示すもの:  $\gamma - \gamma(t, x) = 0$  が水面を定義  
するものとする。本来, (I) は,  $\gamma$  也, この  
 $\gamma$  について かかれべきものである, 然し考  
慮することなく

$$(I)' \quad \begin{cases} u_t + u u_x = -g \gamma_x \\ \gamma_t + u \gamma_x = -\gamma u_x \end{cases}$$

とかくべきものである。  $\gamma$  も  $\eta$  であるかといふも  
 $\gamma = \zeta + \eta$  の  $\eta$  を用いてかいても, この  $\gamma$

程式' に於ける 非線型項 が "同じ型" である  
 ために, (I) の形 1 においてある。結論的に  
 いえば, この まいまい 中 には, (I), (II) を  
 混同して, いわゆる "long wave paradox" と  
 よばれる困難に ぶち当たる 事がある といつていい  
 かもしれない。

証明は §3 1 への べきとして, (I), 及び  
 (I)' から, エリー-1 は

形をかえる ことなく 伝播する 有限幅  
 の 長い波は 存在せず, 時間 がい  
 たらば, 必ず 崩れる (break down)

と 結論した。その 波 こそ, 北 海 の 絵 に 示された  
 もの である) ... ("Tides and waves" 1845)。

他に (II) が

$$\eta = 2A^2 \operatorname{sech}^2 A(x \pm ct)$$

の 形 の 孤立波 solitary wave を 解 にもつ  
 こゝには KdV の 人 が 示して 以来 大 々 知 っ  
 て あり, 周期解 といふ Jacobi の 楕円函数  
 で 表せる 解 も つかう ことも できる。そして,  
 こゝで, 時間 と 共に 形 を か へ ない で 伝 播 する  
 波 がある といふ ならば, これこそ ラッセル が  
 発見した solitary wave を 理論的に 根拠  
 が ける もの に ちがいない であろう ... しか

これは エアリー の定理と真向から対立する。

(#) から出発して、同じ“長い波”の仮定から、相矛盾する二つの“理論”が導き出される、“一方がまちがってゐるにちがいないか”、その説明をまつ間、この エアリー理論と K-dV 理論（数微分法に、二つの“あきま”）の相矛盾した共存を、息子のバーコフ（G. Birkhoff）は、その著 Hydrodynamics (Dover 1955) の中で、そして アーセル（F. Urnell）は、その論文(\*) の中で、“長い波のパラドックス long wave paradox”とよんだ“の”であった。

(\*) F. Urnell : Proc. Phil. Soc. Cambridge, 49 (1953), pp. 685-694.

注意      このような事態は 有限振幅の波を考へるから起るのである、2. 無限小振幅の水面波を考へるかぎり、非-近似的な与える方程式として、いわゆる線型波動方程式が与えられ（Lagrange）以来、才人が一致してゐる。

さて、“long wave paradox”の解明について結論をいへば以下の様になる。そして、この結論を知った今とな、2つあればわかることだが、Korteweg, de Vries の  $\eta = \eta(x)$ 、 $\{Y, u = p_k\}$  についての方程式ではなく、 $Y - \eta = \eta$  が成り

さし“長い波”について、 $\zeta$ に属する方程式を考察したことに意味があったのである。

すなわち、水深  $h$ 、波長  $\lambda$  の他に、波高 (あるいは振幅)  $\alpha$  も考慮に入れて、  
 リッセルの solitary wave も含む“長い波”は  
 $\delta \equiv \frac{h}{\lambda}$  が小さいのであるが、これはなく

$$(A) \quad \delta^2 = \left(\frac{h}{\lambda}\right)^2 \sim \frac{\alpha}{h} \equiv \varepsilon, \quad (\alpha \ll h, h \ll \lambda \text{ の時}),$$

のような関係で、波の分散と非線型性とのバランスとしており、従来いわれていた“長い波”の条件

$$(B) \quad \delta = \frac{h}{\lambda} : \text{小さい}, \quad \text{しかし} \quad \varepsilon = \frac{\alpha}{h} : \text{有限}$$

をみたす波こそ浅水波 shallow water waves と呼んで、長い波と区別されるべきものである。

ここに (A) の  $\sim$  は、 $\alpha, \lambda$  が ( ) の中に示した条件をみたすときは無限り、もしも同じ程度であることも意味するが、 $\delta$  が無限小である場合には (B) から長い波の近似 (方程式) が導かれるのではない、本質的な点では、極端にいて、 $\delta^2 = \varepsilon$ 、すなわち、

$$\left(\frac{h}{\lambda}\right)^2 = \frac{\alpha}{h}$$

で表される非線型4生と分散の関係にある。

この事実を最初に認識したのは  $p$ -civ (Ursell) であるが、数学的に厳密に、この Ursell の“思想”を明らかにしたのは我々である：

T. Kano - T. Nishida : J. Math. Kyoto Univ., 19 (1979)  
(LX下, KN.1, 211)

同 : Lecture Note in Num. Appl. Anal. vol. 6 (1983)  
Kinokuniya - North Holland (KN.2).

同 : A mathematical justification for Boussinesq  
equation and K-dV equation, 近刊.  
(KN.3).

注意

ここに述べた二次元流のことは述べたが、三次元で同様のことを考えた場合、T. Kano の Thesis (京大, 1984) がある。

さて、我々は

$$\begin{cases} (x, y) = (\lambda x', h y'), & t = \frac{\lambda}{c} t' \\ c = \sqrt{g h}, & g: \text{重力加速度}, \\ \varphi = c \lambda \varphi', & \psi = h \psi' \end{cases}$$

で (#) の無次元化を考える。そこで、無次元パラメータ  $\delta = h/\lambda$  が自然に  $\lambda, h$  に対して、対応する (#) の無次元版  $E$ 、以下の表に得られ、ただし、ギリシヤ記号は示していない：

$$(4) \quad \begin{cases} \delta^2 (\varphi_t + \frac{1}{2} \varphi_x^2 + \varphi) + \frac{1}{2} \varphi_y^2 = 0, \\ \delta^2 (\varphi_t + \varphi_x \varphi_x) - \varphi_y = 0, \end{cases} \quad \varphi = \varphi(t, x).$$

注意 ここで、上の無次元化について、一言しておこう。

(1) 速度ポテンシャル  $\varphi \rightarrow \varphi' = \frac{1}{c\lambda} \varphi$  への変換は次の様になる、つまり：

$$\begin{aligned} u = \varphi_x &\rightarrow u' = \frac{1}{c} u \\ v = \varphi_y &\rightarrow v' = \frac{\delta}{c} v, \end{aligned}$$

即ち、 $x$  軸方向 (水平方向) の速度成分は、音速  $c = \sqrt{g h}$  で正規化される形で無次元化されるが、垂直方向の速度成分  $v$  は、 $c$  による正規化の  $\delta$  倍である。従前いわれた“長い波”の条件  $h \ll \lambda$  に基づいて  $\delta \ll 1$  であるから、このことは、“長い波”の垂直方向の速度が極めて小さいことを、数量的に表しているのである。

(2) この無次元化は、前記(B)に対応している。

さて本論にも関わらず、以下の結論をのべておこう。

- ① まず (4) に対する初期値問題の解  $\varphi$  (時間に関する局所) 存在を示し、更にこの解  $\{\varphi^\delta, \varphi^\delta\}$  が、 $\delta \in [0, 1]$  に関して無限回連続的微分可能

とある事を知った (KN.1, KN.2).

- ② 次に、 $\delta$  に関する テイラー展開の 第一項 (定数項)  $(\gamma^0, \varphi^0)(t, x)$  が いわゆる 浅水波方程式' をみたすことを示した:

$$\begin{cases} \varphi_t^0 + \frac{1}{2} \varphi_x^0{}^2 + \gamma^0 = 0 \\ \gamma_t^0 + (\gamma^0 \varphi_x^0)_x = 0. \end{cases}$$

今  $\gamma^0$  を  $\gamma$ ,  $\varphi_x^0$  を  $u$  とおけば、これが elli となおさず Airy の 近似方程式' (I)' とあることかわかる。11.4.1 について KN.1 等を見てもうと12, 我々は、解の、右辺に関する連続性をから

$$\|\gamma^0(t) - \gamma^\delta(t)\|_p, \|\varphi_x^0(t) - \varphi_x^\delta(t)\|_p = O(\delta^2)$$

を示した。

この意味から言って、エプリー (Airy) の方程式' (I)' は 浅水波による (井)-(B) の近似方程式' として意味をもつことが、数学的に証明されたのである。

注意 後にもいれりか、この点については、周期解の場合に証明を与えた オウシヤ = コフ (L. V. Ovsjannikov) に深く学ぶ、

自らの改良を更に改良してコーシー・ゴッ  
レフスキーの定理を使いやすくし、周知解  
がない場合にも適用できる様にした  
T.Nishidaの功績が大変い。

③ (A)に対応した(井)の無次元方程式は、

$$\begin{cases} \psi = c\lambda\psi' = c\lambda(-\tau + \delta^2\phi) \\ \chi = h\chi' = h\left(1 + \frac{\alpha}{h}\tau\right) = h(1 + \varepsilon\tau) \end{cases}$$

により、定義される  $(\tau, \phi)$  に関する方程式  
式として、次の方程式に帰着される、ただし (A)  
を考慮して、簡単のため  $\delta^2 = \varepsilon$  としてある:

$$\begin{cases} \phi_\tau + \frac{\delta^2}{2}\phi_\tau^2 + \tau + \frac{1}{2}\phi_\tau^2 = 0 \\ \delta^2(\tau_\tau + \delta^2\tau_x\phi_x) - \phi_\tau = 0, \quad y = 1 + \delta^2\tau. \end{cases}$$

内部に於て  $\phi$  が満たす方程式は

$$\delta^2\phi_{xx} + \phi_{yy} = 0$$

である。

そこで、 $-1 = \text{注意}$  としておこう。

(1) まず、上の方程式  $\delta^2\phi_{xx} + \phi_{yy} = 0$

であるが、(B)に<sup>(対)</sup>応する無次元方程式についても、同様

$$\delta^2 \varphi_{xx} + \varphi_{yy} = 0$$

である。  $\delta > 0$  であるから、 $\varphi$  (あるいは  $\phi$ ) は依然調和函数に本質的には、むしろ、 $\delta \downarrow 0$  の極限において、むしろ、むしろそうではない。実際、今の場合、すなわち (A) の下で、 $\{\phi\}$  は

$$z_{tt} - z_{xx} = O(\delta^2)$$

をみたす。(この右辺の意味は、上の  $\{\phi\}$  についての方程式の  $\delta$  についての展開として、すなわち  $\delta \rightarrow 0$  のとき)。

また、前述の通り、② による  $\{\phi^0, \phi^1\}$  をみたすのは、(I)', すなわち、 $\{\phi^0, \phi^1\}$  に関する準線型双曲型方程式である。

(4) 上にいった (A) に対応する無次元化について、次のことを注意しよう。

(B) に対応しては、 $y = h y'$ ,  $\tau = h \tau'$  によって、いわば無次元の水面  $\tau'$  を定義した。今、(A) に対応しては、まず

$$y = h + y_1 = h + \alpha y_1',$$

によって、無次元振幅  $y_1'$  を

$$\gamma = \bar{\gamma} + \gamma_1 = \bar{\gamma} + \alpha \gamma_1'$$

により定義し、それを  $\gamma$  とあらためておいた  
 のであり、それに代る (というよりは、  
 $\gamma$  と  $\gamma'$  が水面  $y=\gamma$  でみたす力学  
 関係: 運動量保存の式等が成り立つ、  
 事がある) 形の速度ポテンシャルとして、前式  
 による  $\phi$  を定義したのである。

あらういて、

さて、本論に戻れば、線型双曲型方程式に  
 対応するエネルギー不等式 及 上の注意 (1) により、  
 $(2), u = \phi_x$  は、波動方程式

$$\bar{\gamma}_{tt} - \bar{\gamma}_{xx} = 0$$

の解 (2) により  $O(\delta^2)$  の誤差で近似され  
 る事がわかる。すなわち、無限小振動に於いて  
 は、(2) は線型波動方程式による一次近似を  
 もつという Lagrange, ラグランジュ, の理論が、  
 有限振幅の長い波 に対して成り立つことがわか  
 ったのである。

③' 本来、③ のつづきであるが、結論 ③ が長  
 くなりすぎるから、項を更へよう。

ここで、(2)-(A) と K-MV 方程式 (II) の

関係を議論することにしよう。その目的のために、次の事にも注意する：

そもそも、long wave paradox に到る“混乱”  
 のもとには、水面波の方程式(井) (即ち、内部で  
 $\Delta\psi=0$  をみたすこと) を偏微分方程式として  
 解く事がむづかしいために、様々の仮定を荷  
 し、様々の近似を言いつけて来たことにある。  
 存在定理がむづかしいのは非線形型4生に  
 も勿論由來するが、より本質的な点では、  
 (井) が、単純に水面  $y = \gamma(t, x)$  上の方程式  
 として“解いた”形、でかかれていない  
 ところにある。いいかえれば、(井) の中の

$$\psi_t \mid y = \gamma(t, x)$$

が、実際、 $\Omega(t)$  (p.6) の境界  $\{x, \gamma(t, x)\}$   
 上の何様な量であるのかを数学的に厳  
 密に表現すること、が必要であるのに、簡単で  
 はないこと、この問題をむづかしくしていた  
 のである。

我々が得た (井) に対する存在定理、  
 — それは実際には無次元方程式 (4)  
 に変えて示され (KN.1)、しかもハロウ  
 ーダ  $\delta$  についての微分可能4生が示され  
 た (KN.2) 事によって、 $\psi_t \mid y = \gamma(t, x)$  を

次の様に表される事が、数学的に厳密に言

わかれたのである：

$$\begin{aligned} \varphi_y|_{y=1} &= -\delta^2 \gamma^2 \varphi_{xx}|_{y=1} - \\ &\quad - \frac{\delta^4}{3} \gamma^2 \left\{ 3(\gamma_x^2 + \gamma \gamma_{xx}) \varphi_{xx}|_{y=1} + 6\gamma \gamma_x \varphi_{xxx}|_{y=1} + \gamma^2 \varphi_{xxxx}|_{y=1} \right\} + \\ &\quad + O(\delta^6), \end{aligned}$$

あるいは， $\phi$  についていえることは，

$$\begin{aligned} \phi_y|_{y=1+\delta^2\gamma} &= -\delta^2 \phi_{xx}|_{y=1+\delta^2\gamma} - \delta^4 \left( 2\phi_{xx}|_{y=1+\delta^2\gamma} + \frac{1}{3} \phi_{xxx}|_{y=1+\delta^2\gamma} \right) + \\ &\quad + O(\delta^6). \end{aligned}$$

ここで注意しなければならないのは，この展開は  $\delta \in [0, 1]$  について  $\{\gamma, \varphi\}$  あるいは  $\{\gamma, \phi\}$  を展開 (Taylor 展開) したのではなく，ポテンシャル  $\phi$ ，境界に与える“法線系”微分を，境界における“接線系”微分で表わす作用素

$$\mathbb{T}: \varphi_y|_{y=\gamma} \longrightarrow \varphi_x|_{y=\gamma}$$

9.  $\delta$  に関する展開である, という事である。

さて, この展開を (3) の1はいいにあげた (p.14) の2,  $\phi$  に関する方程式系に代入して, 次を得る:

$$\begin{cases} \phi_t + \eta + \frac{\delta^2}{2} \phi_x^2 = O(\delta^4) \\ \eta_t + \phi_{xx} + \frac{\delta^2}{3} \phi_{xxxx} + \delta^2 (\eta \phi_x)_x = O(\delta^4). \end{cases}$$

これをもとにして, KN.3 に於て我々は,

$$\eta \pm \phi_{xx}$$

が, K-dV 方程式 (II) (p.5) の解を  $O(\delta^4)$  の誤差で近似される事を証明し, これにより (II) - (A) の近似方程式として, すなわち, 長い波の近似方程式として, K-dV 方程式に対する一つの数学的正当化を示したものである。

注意 KN.3 には, 後に述べる Boussinesq 方程式 (Boussinesq equation) も扱っているが, ここでは詳細を省く。

大略の様子を説明しよう。今我々は, 無次元方程式 (4) (p.12) を, 解析函数からなる Banach

空間  $B_p$  の  $2\epsilon$ -ノルム :  $X = \bigcup_{p \geq 0} B_p$ ,  $2\epsilon$  といて  
いる。今  $\epsilon < 1$ ,

$$z(0) - \phi_x(0) = O(\delta^2), \quad z(0) + \phi_x(0) = O(1)$$

なる初期値をとる  $z$  皮も考察しよう。初期値  
に関する連続性を考慮して

$$z(t) - \phi_x(t) = O(\delta^2), \quad z(t) + \phi_x(t) = O(1)$$

in  $B_p$ ,  $\forall p > 0$ ,  $z$  がある。さて、

$$g = \frac{z - \phi_x}{2}, \quad f = \frac{z + \phi_x}{2}$$

により、上の方程式 (p.19) を対角化すれば、  
 $f$  は次の方程式を満たす:

$$f_t + f_x + \frac{\delta^2}{6} f_{xxx} + \frac{3}{2} \delta^2 f f_x = O(\delta^4).$$

右辺 = 0 が他なる  $K$ -dV 方程式, (II), p.5,  
がある。右辺を有する方程式を同じ  $X$  の中  
でいって、この解  $f$  と  $f$  を比較すれば、右辺に  
関する連続性により、

$$\|(f - \bar{f})(t)\|_p = O(\delta^4)$$

が従う。  $\phi$  についても対応する K-dV 方程式の解による近似と同様系に考えよとを通して、結局 (41), あるいは  $\phi_x$  の、水面  $\gamma = 1 + \delta^2 \gamma$  における値を、K-dV 方程式の解によつて、 $O(\delta^4)$  の誤差で近似できることが示される。

こうして、いわゆる "long wave paradox" は、パラドックスにあるという所以が明らかとなった。すなわち、p.5 にいう (II) と (I) (I') が共に "長い波" という同一の仮定から出発して (II) から得られた "近似方程式" である、という点には見逃がれておらず、エプリー及コルトウエ-グ・ド・フリーヌは夫々、天才的直観によつて (II) - (A), (II) - (B) という相異なる条件下での "長い波" の近似をおこなつていた、という点が実際のことであった。その意味で、どちらの理論も間違ひではなくて、同一事の異なる側面を解析として、互に支えあうものがあったわけである。

ところで、我々は "long wave paradox" を "解体" したけれども、それは時間的局所解の存在定理を基にした議論であるから、エプリーがいう本義に (I) の解は 時間 に対しては必ずつづれずにはいないかどうか、本義のそこを見えわめることは保障できない。この以上、この "パラドックス" が見出されるに至つた問題点に対する完全な答を与えては

いなのである。

しかしながら、まず第一には、少くともそれが  
パラドックスではないことは十分明らかとなつたし、  
第二に、エアーリーも、ラッセルも、そして K-dV  
 $\alpha = \infty$  も、… (＃) もそのを實際にはとらず  
に、すなわち、(I), (II) に表現される  
“三葉い水波、長い波”が本当に(＃)の解を  
近似しているとの保証はない、といった、相異  
なる側面：“長い波”(A), と “三葉い水波”(B),  
の二つに“看入れ”していったのである事を考  
えれば、我々の議論の意味は明らかである  
う。

実際、アール、バーコフ … が “長い波の  
パラドックス”を強調するについては、定常問題  
に対する、解の存在が証明されていた、という事  
情があった。すなわち、1925年には、レヴィ・チヴィタ  
Levi-Civita, ストリエフ Struwe, によって、  
周期的定常解の存在が、そして 1943-47 年頃  
には ラウレンティエフ, Laurentiev, によって、孤立波  
の存在が示されていた。

以上  $\alpha$  へ来た、たこを服膺した上で、  
そもそも solitary wave を発見者であり  
その後 100 年以上にわたる “せわぜ” の  
もとをつくら、スコット・ラッセルからはじめ、  
これまでいかに、をたかってみることにし  
よう。

その前に、(A), p.10, が, K-dV 方程式 (II), p.5, に は、より 知られていることを注意し 2  
 本、こう。 すなわち: K-dV 方程式 が

$$u(t, x) = 2A^2 \operatorname{sech}^2 A(x \pm ct)$$

なる "soliton" 解 をもつことは 前述した通り  
 である。 今  $u$  の 波高 が 2 倍 になる と す  
 れば,  $u$  は,  $A$  と  $\sqrt{2}A$  の どちらか である

$$U(t, x) = 4A^2 \operatorname{sech}^2 A(\sqrt{2}x \pm \sqrt{2}ct)$$

となる。

この 波高 が  $u(t, x)$  の  $\sqrt{2}$  倍 の 速度 を も  
 っている ことが、更に 頂点 を 通る (対称) 軸  
 を 中心に  $1/\sqrt{2}$  shrink する (中央に よ,  $2 < 3$ )  
 ことが わかる。 すなわち、 $u$  は 波高 が  
 $1/\sqrt{2}$  に ちが なる の である。

一方 (A) を みてみると、波長  $\lambda \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\lambda$   
 の とき (A) が 保たれる と する と

$$\left(\frac{R}{\lambda}\right)^2 \rightarrow 2\left(\frac{R}{\lambda}\right)^2 \quad \text{から} \quad \frac{\alpha}{R} \rightarrow \frac{2\alpha}{R}$$

と かわる から、波高 が 2 倍 になる へ こと  
 が わかる の である。

## 2. 歴史・孤立波 solitary wave の発見者 J.Scott Russell

冒頭にふれた次の“報告”からはいめよう。ひきつづいて本稿でふれた文献を列挙しておく：

- J.S.Russell: Report on waves, in "Report of the 14<sup>th</sup> meeting of the British association for the Advancement of Science held at York in September 1844", J.Murray, London, 1845, 311-390.
- G.B.Airy: Tides and waves, B.Fellowes, London, 1845.
- G.G.Stokes: Trans. Cambridge Phil. Soc., 8(1847), 441-473.
- J.Boussinesq: J. Math. Pure. Appl., 2<sup>e</sup> Sér. t.17(1872), 55-108.
- Lord Rayleigh: Phil. Magaz., 1(1876), 257-279.
- Korteweg-de Vries: Phil. Magaz., 39(1895), 422-443.
- Levi-Civita: Math. Ann., 93(1925), 264-314.
- D.J.Struik: Math. Ann., 95(1926), 595-634.
- M.Lavrentiev: Akad. Nauk Ukrain. RSR, Zb.Proc.Inst.Math., 8(1946), 13-69.
- K.-O.Friedrichs: Comm.Pure Appl. Math., 1(1948), 81-85.
- K.-O.Friedrichs - D.H.Hyers: Comm.Pure Appl.Math., 7(1954), 517-550.
- F.Ursell: Proc.Phil. Soc.Cambridge, 49(1953), 685-694.

冒頭にあつた様には、ラッセルがはいめて solitary wave に出会、たゞは 1834 年のことである。その後、この“特殊な波”——彼は primary wave ともよんでゐる——の構造を調べるために、ラッセルは実験室で solitary wave をつくる仕事に没頭し、1838 年、いわば第一報を公表している。しかし、この報告は猛烈な批判にさらされた本稿で、批判、指摘された点に留意しながら（ラッセルの言）実験研究をやりなおし、くりかえし、続けた結果をいめ

されたが、上の "Report on waves" がある。

ラッセルは主に, solitary wave の速度を表す実験式を見出すことにうとめた。特に, 波高, 波長, 水深の変化による速度変化を研究した。

ラッセルが得た実験式は

$$v = \sqrt{g(h + \alpha)}$$

である。記号は変えて, 我々のものにあわせてある。  $g$  は重力加速度,  $h$  は平均水深,  $\alpha$  は, 前出 (p.10) の通, 静水状態から加えた波高である。

音速  $c = \sqrt{gh}$  を用いて, 上式は

$$v = c \sqrt{1 + \frac{\alpha}{h}} = c \sqrt{1 + \varepsilon}$$

と, 我々の記号に合せてかくことができる。波長  $\lambda$  と水深  $h$  の比:  $\delta = h/\lambda$  がいいあるという "長い波" の条件ではなくて,  $\varepsilon = \alpha/h$  という量が見出されていることに注目したい。

特に, p. 352 にあいて, ラッセルは次の事に注意している:

- ① 水深が増すと, 孤立波は速度を増す。
- ② 水深が増ると, 波長が短くなる。

- ③ 波長が増すと波高は低まり、逆に、波長が短くなると共に波高は大きくなる。

そして、例としていかなる sloping beach, 波打際をあげ、浜辺がだんだん狭くなるにつれて波が短くなり、高さが増し、波高が水深に等しい程にもなるとついに波頭が前に突き出たて崩れしてしまう様子は、この①～③の事象によるのだと説明している。

①～③自体は極めて興味深い事象を指摘はあるが、それで波打際の説明をするには、p. 1. にのべた我々の議論をいふには、ラッセルがすでに、—— というか、彼もまた、—— “浅水波” と “深い波” とを混同している事を示している。

それは②と③がバラバラの事象として認識される以上当然の帰結であろうが、水槽を用いた実験がどれ程精密であつても、②と③の間には、p. 1. p. 10 にのべた様な (A) の様な関係を見出すことは、実験だけからは難しいであろう。

これに関連して一言いふべきは、次節でいふエプリーの論文は、最後ちかごろのなりが負荷をラッセル批判についやしているが、その中でエプリーは、理論的記述の部分はラッセル本人以外に通用しないものだから、読者がそれを信じる危険をおかす様子を警告したい、とまで記している (p. 350)。このついでにもう一言

こうした反応——就中、クリニツダ天宮台吾とて長く威をふるうエプリー。様な“大物”の、殆んど異例ともいふべき批判——に反してラッセルがいた態度にのけろおきたい。

自分の見出した実験式に比べれば、1年かには誤差が大きいとあきられるにも拘らず、エプリーが、(井)をもとにしてみちびいた水面波の速度の近似式について“きやめてよく実験結果に合致している”というのに反して、ラッセルは驚きをかてた。が、自分が重宝をもた実験と観察に基いた自信を抱き、他方理論に先走りすることなく、“長い波の理論は  $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ ” につて之れでいるのである、と、solitary wave を特別に見する、い

かなる理由もなし“(p.346)とエプリーがいうにもかかわらず、いささかもひるむことなく、solitary wave が、解明さるべき特異性をそなえていゝと99確信を表明しつつけたラッセルの態度に、我々は学ぶべきものがあると思う。

特に今日、この二人の間になされた可靠な白熱した学問上の論争が数学者の間になされるのを見る機会がなくなつたことを思はば、一層のことである。

閑話休題。次節では、このエプリーの議論を、“三つの水の長い波”にかまゝ、と、みとめることにしよう。

### 3. エリー - a 浅水波の理論

“潮汐と波” というエリーの大論文は、Encyclopédie ディドロ・メトロポリタナ所収として引用される。現在、ワシントン国会図書館には、エリー本人の署名入りの贈本がある様子が、このLCからコピーをとりよせて製本したものが、阪大・理・数学図書に収められている。

まずエリーは、長い波： $h/\lambda \ll 1$  の速度について、Lagrange から与えた一次近似  $u_0 = c = \sqrt{gh}$  の次を求めた。

$$(3.1) \quad u = c \left( 1 + \frac{3}{2} \frac{h}{\lambda} \right),$$

ただし  $y = h + \eta$ , §1 参照, を与えている。

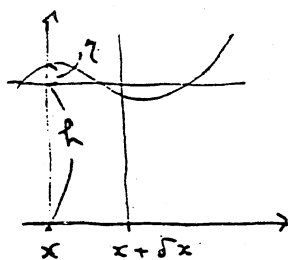
次に、有限振幅の長い波を考えた。速度ポテンシャル  $\psi$  は §1 の通  $\psi$ , 従って  $x$  方向の速度は  $u = \psi_x$ , 水面:  $y = h + \eta(t, x)$  により  $\eta = \eta$ 。

まず運動方程式は、Euler による,

$$(3.2) \quad u_t + u u_x = -g \eta_x$$

ただし、垂直方向の速度成分  $v = \psi_y$  も、長い波の仮定から、高次  $\eta/\lambda$  として、他の高次の非線形項と共に、おろしてある。

次に連続方程式、すなわち質量保存則は、



左の図をみながら，高次の小さな量を捨てれば，下の通：

$$\frac{\partial}{\partial t} [(h+\eta) \delta x] = -\frac{\partial}{\partial x} (u \cdot (h+\eta)) \cdot \delta x,$$

すなわち

$$\frac{\partial}{\partial t} \eta = -\frac{\partial}{\partial x} [u \cdot (h+\eta)],$$

あるいは

$$(3.3) \quad \eta_t + u \eta_x = -(h+\eta) u_x.$$

こゝ (3.2) - (3.3) を連立させたのが，§1. (I)，  
2にある。

今 "Riemann invariants" を計算すれば：

$$f(\eta) = 2c \left( \sqrt{1 + \eta/h} - 1 \right)$$

これより

$$P = f(\eta) + u, \quad Q = f(\eta) - u$$

が，

$$P_t + (u+\kappa) P_x = 0$$

また，

$$Q_t + (u-\kappa) Q_x = 0$$

をみたすことを確かめよう，ただしく  $\kappa = c \sqrt{1 + \frac{\eta}{h}}$

すなわち  $u|_{y=r} = \varphi_2|_{y=y=r+\eta}$  と  $f(\eta)$  の3

きまり量とあるいは  $Q$ , 従って水の表面の運動 ~ 水面波は,

$$\text{よして } x > 0 \text{ 方向に } c\sqrt{1+\frac{\eta}{h}} + u \quad \eta,$$

$$Q \text{ は } x < 0 \text{ — } c\sqrt{1+\frac{\eta}{h}} - u \quad \eta,$$

伝播するのである。

今、もし、前進波しかないとするならば

$$Q=0, \quad P=2u=4c\left(\sqrt{1+\frac{\eta}{h}}-1\right)$$

から、 $P$  の伝播速度は

$$(3.4) \quad c\left(3\sqrt{1+\frac{\eta}{h}}-2\right) \cong c\left(1+\frac{3}{2}\frac{\eta}{h}\right),$$

$$\propto \frac{\eta}{h} \text{ 小.}$$

と表わされる。

さて (3.4) から、小振幅の場合には上の式に、 $\eta$  に代えて  $\eta$ ,  $T$  長い波の速度 (3.1) の近似として再発見されたが、いずれにせよ、振幅、あるいは、静水状態から測り、 $T$  波高  $\eta$  に依存する形で伝播速度が与えられ、無限小振幅の場合に Lagrange が与えた  $v=c$  と決定的に異なり、2 いる。

すなわち、有限振幅の水面波は、エリー-ワ理論から、波速の  $\phi$  が  $\psi$  より速く進むことになる、そのために、安定した、たとえば  $\phi = 1$  した solitary wave の様な形、かゝり出しても、時間と共に波頭が前にせり出して、ついには崩れあちこち ———— というのがエリー-ワ結論であった：



そして、この結論は、(3.2) - (3.3) に於いて  $u u_x$  あるいは  $u^2 x$ ,  $\partial u_x$  という非線形項が主に効いてゐるために、ひいては  $\phi$  のため、K-dV 方程式の解の場合、 $u_{xxx}$  によつて、

$u u_x$  のために波頭が前にせり出してゐる場合、 $\phi$  がたがひによつて "吸収" し、 $\phi$  として安定した solitary wave solution も可能にしているのである。

従つて、近似 (一次は、Lagrange による  $u_{tt} - u_{xx} = 0$ ,  $\phi = 1$ ) までとつたとき、なんともいへない dispersion の項が得られなにかぎり、エリー-ワ理論を否定しても、やむを得ない。

(つづく)