

Sur les ondes superficielles de l'eau et le développement de Friedrichs dans le système de coordonnées de Lagrange

par

Tadayoshi KANO et Sae MIKI

(Département de Mathématiques, Université d'Osaka, Japon)

1. Les ondes superficielles de l'eau. Les ondes de surface de l'eau ont tendance à s'écraser sur elles-mêmes et c'est ainsi non seulement sur la plage mais aussi en pleine mer. En effet, G.B.Airy a donné (non pas démontré mathématiquement) en 1848 [1] ses fameuses équations des ondes en eau peu profonde comme la seconde approximation pour les ondes de surface de l'eau d'ampleur finie après la première approximation de Lagrange dans son livre [14] par l'équation linéaire des ondes pour les oscillations infinitésimales :

$$(1.1) \quad u_t + uu_x + g\gamma_x = 0$$

$$(1.2) \quad \gamma_t + u\gamma_x + \gamma u_x = 0, \quad \gamma > 0, \quad (\text{Airy, 1848}),$$

où u est la vitesse et $y - \gamma(t,x) = 0$ représente le profil des ondes de surface de l'eau. Elles s'écrasent, en effet, dans un temps fini; soient :

$$(1.3) \quad P = u + 2(g\gamma)^{1/2}, \quad Q = u - 2(g\gamma)^{1/2},$$

alors elles satisfont aux équations

$$(1.4) \quad P_t + ((g\gamma)^{1/2} + u)P_x = 0, \quad Q_t - ((g\gamma)^{1/2} - u)Q_x = 0,$$

représentant des mouvements de surface de l'eau avec les vitesses dépendantes d'ampleur des ondes, c'est-à-dire que la crête s'avance plus vite que le creux et ainsi la "tête" dépasse "le corps" pour s'écraser sur elle-même.

La découverte de l'onde solitaire de surface de l'eau par J.Scott Russell en 1834[27] est donc quelque chose de très singulier et par la suite, un nombre considérable de mathématiciens éminents de 19e siècle se sont intéressés aux ondes superficielles de l'eau tels que, entre autres, G.G.Stokes, Lord Rayleigh...

Airy s'est violemment opposé à l'idée de l'onde solitaire de Scott Russell, alors que G.G.Stokes donnait une seconde approximation de vitesse de propagation indépendante d'ampleur pour les ondes d'ampleur finie en 1848 [30]. L'idée de l'onde solitaire est considérablement renforcée par la découverte de l'équation de Boussinesq [2]:

$$(1.5) \quad u_{tt} - u_{xx} - (3u^2 + (1/3)u_{xx})_{xx} = 0,$$

et celle de Korteweg - de Vries[13]:

$$(1.6) \quad u_t + u_x + 3uu_x + (1/3)u_{xxx} = 0,$$

qui admettent les ondes solitaires comme des solutions particulières.

Mais il est très difficile de voir la structure des ondes superficielles de l'eau à travers des équations "approchées" ainsi déduites, même après la démonstration mathématique de l'existence des solutions analytiques périodiques d'ondes de surface de l'eau par Levi-Civita en 1925[17] et ensuite par Struik également en 1925[31], et celle d'ondes solitaires par M.Lavrentiev en 1947[16] et Friedrichs-Hyers en 1954[6].

Or Friedrichs a proposé (ou plutôt découvert) en 1948[5] une procédure systématique pour obtenir les équations d'Airy à partir d'équations d'Euler originales pour les ondes superficielles de l'eau en considérant le problème nondimensionnel pour le potentiel Φ et le profil de surface $y = \Gamma(t,x)$ pour un écoulement bidimensionnel:

$$(1.7) \quad \delta^2 \Phi_{xx} + \Phi_{yy} = 0 \quad \text{dans } \Omega = \{ (x,y): x \in \mathbf{R}, 0 < y < \Gamma(t,x) \},$$

$$(1.8) \quad \Phi_y = 0, \quad x \in \mathbf{R}, \quad y = 0,$$

$$(1.9) \quad \delta^2 (\Phi_t + (1/2)\Phi_x^2 + y) + (1/2)\Phi_y^2 = 0, \quad x \in \mathbf{R}, \quad y = \Gamma(t,x),$$

$$(1.10) \quad \delta^2 (\Gamma_t + \Gamma_x \Phi_x) - \Phi_y = 0, \quad x \in \mathbf{R}, \quad y = \Gamma(t,x).$$

En supposant un développement de solutions et d'équations en séries entières par rapport à un paramètre non-dimensionnel δ qui intervient d'une manière naturelle dans la non-dimensionalisation du problème représentant le ratio de la profondeur moyenne h de l'eau à la longueur des ondes λ : $\delta = h/\lambda$. Friedrichs a montré que les premiers termes de développement satisfaisaient aux équations d'Airy. Il s'est particulièrement intéressé à cette procédure, car les équations d'Airy sont exactement les mêmes que celles pour le mouvement de gaz polytropique [3].

Lui-même n'a pas démontré la légitimité mathématique de son développement, et c'est L.V.Ovsjannikov qui a donné une justification mathématique pour les premiers termes lorsque les ondes étaient spatialement périodiques [25]. Nous avons démontré que les solutions analytiques du problème nondimensionnel existent et sont indéfiniment différentiables par rapport à ce paramètre nondimensionnel δ et que par la suite le développement de Friedrichs est mathématiquement légitime pour les solutions analytiques[9]. On a par conséquent donné une justification mathématique pour les équations d'Airy également pour les solutions analytiques qui ne sont pas nécessairement périodiques spatialement [8].

Le développement de Friedrichs nous a permis de donner une justification mathématique pour l'équation de Boussinesq et celle de Korteweg-de Vries comme des équations approchées découvrant la structure des ondes "longues"[10]; elles satisfont aux relations telles que les quantités ε et δ^2 définies par

$$(\#) \quad \varepsilon = (\text{l'ampleur } \alpha)/(\text{la profondeur } \lambda) \text{ et } \delta^2 = ((\text{la profondeur } h)/(\text{la longueur } \lambda))^2$$

sont de même ordre comme infinitésimaux lorsque l'on fait tendre λ vers l'infini et α vers zéro, alors que ε reste fini, δ tendant vers zéro pour les ondes en eau peu profonde d'Airy, (voir également F.Ursell [32]). Notons enfin que nous avons donné également une justification mathématique pour l'équation de Kadomtsev-Petviashvili comme une équation approchée pour les ondes longues caractérisées en haut dans l'écoulement tridimensionnel [12].

Dans cet article, on donnera exactement la même théorie que celle mentionnée plus haut, cette fois-ci dans le système de coordonnées de Lagrange. Les démonstrations détaillées seront publiées ultérieurement sous le titre: Ondes lagrangiennes de surface de l'eau I, II.

2. Le problème dans le système de coordonnées de Lagrange. Le problème est régi par les équations suivantes:

les équations dynamiques

$$(2.1) \quad x_{tt}x_\xi + (y_{tt} + g)y_\xi + p_\xi/\rho = 0$$

$$(2.2) \quad x_{tt}x_\eta + (y_{tt} + g)y_\eta + p_\eta/\rho = 0,$$

et l' équation de continuité

$$(2.3) \quad x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi = 1,$$

dans

$$(2.4) \quad \Omega_0 = \{ (\xi, \eta): 0 < \eta < h(\xi) \},$$

avec les données initiales:

$$(2.5) \quad x(0, \xi, \eta) = \xi, \quad y(0, \xi, \eta) = \eta,$$

$$(2.6) \quad x_t(0, \xi, \eta) = x^1(\xi, \eta), \quad y_t(0, \xi, \eta) = y^1(\xi, \eta);$$

où $p = p(t, \xi, \eta)$ représente la pression, ρ la densité comme une constante et g la pesanteur.

On s'explique, avant d'aborder le problème, pourquoi on essaie de refaire les mêmes études que nous avons déjà faites dans les années 80 dans le système de coordonnées de Lagrange cette fois-ci. Dans le système de coordonnées d'Euler, il s'agissait du problème aux limites pour l'équation elliptique (essentiellement l'équation de Laplace) avec les conditions aux bords

définies par les équations (1.9) - (1.10). Et tout le problème était concentré dans la façon d'écrire Φ_y sur la frontière libre (ondes superficielle de l'eau) par les valeurs de Φ_x sur la frontière pour obtenir un système complet d'équations sur la frontière libre. La non-linéarité est concentrée sur cet opérateur Dirichlet-Neumann de fonction du potentiel sur la frontière libre. Pour une solution analytique, nous l'avons explicité suivant Ovsjannikov par le noyau de Cauchy pour l'écoulement bidimensionnel et obtenu des estimations a priori uniformes par rapport au paramètre δ pour Φ_z par les valeurs de $\{\Phi_x, \Phi_y\}$ sur la frontière libre dans le cas de l'écoulement tridimensionnel.

On considère, dans cet exposé, les ondes superficielles de l'eau en écoulement bidimensionnel dans le système de coordonnées de Lagrange où la couche initiale est une bande, c'est-à-dire (2.4) avec $h(\xi) = h$: constante:

$$(2.4)' \quad \Omega_0 = \{ (\xi, \eta): \xi \in \mathbf{R}, 0 < \eta < h : \text{constante} \} .$$

Le cas plus général où $h = h(\xi)$ est une fonction de ξ peut être ramené au cas présent si les ondes ne sont pas trop grandes, c'est-à-dire que d'après l'énergie $E(f)$ que l'on définira ci-dessous $h = h(\xi)$ est petite dans le sens qu'on ait $E(h(\xi)-h) + E(D_\xi(h(\xi)-h))$, $D_\xi = \partial / \partial \xi$, est petite.

On va donc considérer l'évolution temporelle de Ω_0 dans

$$(2.7) \quad \Omega_t = \{ (x, y): x \in \mathbf{R}, 0 < y < y(t, \xi, h) \}$$

d'après les équations (2.1), (2.2) et (2.3). On étendra d'abord le problème sur une bande

$$(2.4)'' \quad \Omega = \{ (\xi, \eta): \xi \in \mathbf{R}, 0 < |\eta| < h : \text{constante} \}$$

en définissant les inconnues pour $\eta < 0$ par

$$(2.8) \quad \begin{aligned} x(t, \xi, \eta) &= x(t, \xi, -\eta) \\ y(t, \xi, \eta) &= -y(t, \xi, -\eta) \\ p(t, \xi, \eta) &= p(t, \xi, -\eta). \end{aligned}$$

Le problème nondimensionnel qu'on va résoudre ici s'écrit comme suit pour les quantités nondimensionnelles, avec prime, définies par

$$(*) \quad (t, \xi, \eta) = ((\lambda/c)t', \lambda\xi', h\eta'), \quad (x, y, p) = (\lambda x', hy', \rho gh p'),$$

où g , la pesanteur et $c=(gh)^{1/2}$, la vitesse sonore; on écrit les équations en laissant tomber le prime de quantités nondimensionnelles:

$$(2.9) \quad x_{tt}x_{\xi} + (\delta^2 y_{tt} + 1)y_{\xi} + p_{\xi} = 0$$

$$(2.10) \quad x_{tt}x_{\eta} + (\delta^2 y_{tt} + 1)y_{\eta} + p_{\eta} = 0,$$

l' équation de continuité:

$$(2.11) \quad x_{\xi}y_{\eta} - x_{\eta}y_{\xi} = 1,$$

dans

$$(2.12) \quad \Omega_1 = \{ (\xi, \eta): 0 < |\eta| < 1 \},$$

avec les données initiales

$$(2.13) \quad x(0, \xi, \eta) = \xi, \quad y(0, \xi, \eta) = \eta,$$

$$(2.14) \quad x_t(0, \xi, \eta) = x^1(\xi, \eta), \quad y_t(0, \xi, \eta) = y^1(\xi, \eta);$$

et les conditions aux bords

$$(2.15) \quad p(t, \xi, 1) = 0, \quad y(t, \xi, 0) = 0,$$

et enfin l'équation de surface sur $\eta = 1$:

$$(2.16) \quad x_{tt}(1)x_{\xi}(1) + (\delta^2 y_{tt}(1) + 1)y_{\xi}(1) = 0$$

avec $x_{tt}(1) = x_{tt}(t, \xi, 1)$ etc.

Pour obtenir les solutions analytiques du problème (2.9)-(2.16) pour le système d'équations elliptiques nonlinéaires (2.9)-(2.11), on le transforme suivant M.Shinbrot [28] au problème elliptique linéaire non-homogène pour les coefficients de développement en séries formelles de Taylor de supposées solutions. Soient en effet:

$$(2.17)^1 \quad x = \xi + \sum_{1 \leq n < \infty} (x^n(\xi, \eta; \delta) / n!) t^n,$$

$$(2.17)^2 \quad y = \eta + \sum_{1 \leq n < \infty} (y^n(\xi, \eta; \delta) / n!) t^n,$$

$$(2.17)^3 \quad p = -(\eta-1) + \sum_{0 \leq n < \infty} (p^n(\xi, \eta; \delta) / n!) t^n,$$

alors on obtient les équations suivantes pour les coefficients $(x_n, y_n, p_n)(\xi, \eta; \delta)$:

$$(2.18) \quad X^n + (1/\delta) (\delta y^{n-2}) + p^{n-2} + \Phi^{n-1} = 0, \quad n \geq 3; \quad X^2 + p^0 = 0,$$

$$(2.19) \quad \cdot X^n + w^{n-1} = 0, \quad n \geq 2; \quad D_\xi x^1 + D_\eta (\delta y^1) = 0;$$

avec les conditions aux bords:

$$(2.20) \quad p^n(\xi, 1; \delta) = 0, \quad n \geq 0; \quad \delta y^n(\xi, 0; \delta) = 0, \quad n \geq 1;$$

et enfin l'équation de la surface de l'eau:

$$(2.21) \quad x^n(1) + (1/\delta) D_\xi (\delta y^{n-2}(1)) + \phi^{n-1}(1) = 0, \quad n \geq 3; \quad x^2(1) = 0,$$

$$\text{où} \quad X^n = (x^n, \delta y^n), \quad \cdot = (D_\xi, D_\eta) \equiv (\partial / \partial \xi, (1/\delta) \partial / \partial \eta),$$

$$(2.22) \quad \begin{aligned} \Phi^{n-1} &= (\phi^{n-1}, \psi^{n-1}) = \\ &= \sum_{2 \leq v \leq n-1} C_{v-2} (x^v x^{n-v} + (\delta y^v)(\delta y^{n-v})), \quad n \geq 3, \\ \Phi^1 &= 0, \end{aligned}$$

et

$$(2.23) \quad w^{n-1} = \sum_{1 \leq v \leq n-1} C_v (D_\xi x^v D_\eta (\delta y^{n-v}) - D_\eta x^v D_\xi (\delta y^{n-v})), \quad n \geq 2.$$

En définissant une certaine énergie $E(X^n)$ pour dérivées par rapport au temps et $E(D^m X^n)$, avec $D^m = \sum_{0 \leq \mu \leq m} D_\xi^{m-\mu} D_\eta^\mu$, pour dérivées par rapport aux variables spatiales, on obtient

(voir § 3) une série d'estimations a priori telles que:

Proposition 2.1 Il existe une constante C positive indépendante de (n, δ) telle que l'on ait:

$$\begin{aligned}
 E(X^n) &\leq C [E(D^2 X^{n-2}) + E(DX^{n-2}) + \\
 &+ \sum_{2 \leq v \leq n-1} C_{v-2} E(X^v)(E(X^{n-v}) + E(DX^{n-v})) + \\
 (2.24) \quad &+ \sum_{1 \leq v \leq n-1} C_v E(X^v)(E(X^{n-v}) + E(DX^{n-v})) + \\
 &+ \sum_{1 \leq v \leq n-3} C_v \{ E(DX^v)E(DX^{n-v-2}) + E(X^v)(E(DX^{n-v-2}) + E(D^2 X^{n-v-2})) \}].
 \end{aligned}$$

Proposition 2.2 Il existe une constante C positive indépendante de (n, δ) telle que l'on ait:

$$\begin{aligned}
 E(D^m X^n) &\leq C [E(D^{m+2} X^{n-2}) + E(D^{m+1} X^{n-2}) + \\
 &+ \sum_{2 \leq v \leq n-1} C_{v-2} \{ \sum_{0 \leq \mu \leq m} C_\mu E(D^\mu X^v)E(D^{m-\mu} X^{n-v}) + \\
 (2.25) \quad &+ \sum_{0 \leq \mu \leq m+1} C_\mu E(D^\mu X^v)E(D^{m+1-\mu} X^{n-v}) \} + \\
 &+ \sum_{1 \leq v \leq n-1} C_v \{ \sum_{0 \leq \mu \leq m} C_\mu E(D^\mu X^v)E(D^{m-\mu} X^{n-v}) + \\
 &+ \sum_{0 \leq \mu \leq m+1} C_\mu E(D^\mu X^v)E(D^{m+1-\mu} X^{n-v}) \} + \\
 &+ \sum_{1 \leq v \leq n-3} C_v \{ \sum_{0 \leq \mu \leq m+2} C_\mu E(D^\mu X^v)E(D^{m+2-\mu} X^{n-v-2}) + \\
 &+ \sum_{0 \leq \mu \leq m+1} C_\mu E(D^\mu X^v)E(D^{m+1-\mu} X^{n-v-2}) \}].
 \end{aligned}$$

Pour obtenir ces estimations a priori uniformes par rapport au paramètre δ , supposons que le mouvement de l'eau soit initialement irrotationnel: en effet, en supprimant la pression p de (2.9)-(2.10) et en intégrant une fois par rapport au temps, on obtient pour la vitesse $(u, \delta v) = (x_t, \delta y_t)$, l'équation suivante:

$$(2.26) \quad x_\xi u_\eta + (\delta y_\xi)(\delta v_\eta) - x_\eta u_\xi - (\delta y_\eta)(\delta v_\xi) = 0,$$

qui donne

$$(2.27) \quad D_{\eta} x^1 - D_{\xi}(\delta y^1) = 0,$$

$$D_{\eta} x^n - D_{\xi}(\delta y^n) + D_{\eta} \phi^{n-1} - D_{\xi} \psi^{n-1} = 0, \quad n \geq 2.$$

D'où, l'on obtient, compte tenu de l'équation (2.19), les équations elliptiques linéaires non-homogènes pour $(x^n, \delta y^n)$, en supprimant p^n :

$$(2.28) \quad D_{\xi}^2 x^n + D_{\eta}^2 x^n = f^{n-1} \equiv -D_{\eta}(D_{\xi} \phi^{n-1} - D_{\xi} \psi^{n-1}) - D_{\xi} w^{n-1},$$

$$(2.29) \quad D_{\xi}^2(\delta y^n) + D_{\eta}^2(\delta y^n) = g^{n-1} \equiv D_{\xi}(D_{\eta} \phi^{n-1} - D_{\xi} \psi^{n-1}) - D_{\eta} w^{n-1}, \quad n \geq 2.$$

Il est à noter ainsi que les données initiales $(x^1, \delta y^1)$ doivent satisfaire aux équations

$$(2.30) \quad D_{\xi}^2 x^1 + D_{\eta}^2 x^1 = 0, \quad D_{\xi}^2(\delta y^1) + D_{\eta}^2(\delta y^1) = 0,$$

ce qui nous permet d'obtenir les estimations a priori uniformes par rapport à δ par récurrence. On donnera les démonstrations dans le paragraphe suivant.

On va ensuite démontrer dans § 5 la convergence de série $\sum_n (E(X^n)/n!)t^n$ qui est la série majorante pour les développements de Taylor (2.17)^{1,2,3}. Elle revient à la démonstration de la sommabilité de série double d'estimations a priori des seconds membres dans les propositions 2.1-2.2. Donc toute la difficulté pour obtenir des estimations a priori uniformes par rapport au paramètre δ pour une solution d'équation elliptique nonlinéaire a été déplacée vers la démonstration de la sommabilité de série double d'estimations a priori.

3. Estimations a priori. Preuves des Propositions 2.1-2.2. Résumons d'abord ce qu'on a dit dans le précédent paragraphe: on voit que les vitesses $(u, \delta v) = (x_t, \delta y_t)$ satisfont aux équations de continuité (2.11) et de sans-vorticité (2.26). L'équation (2.26) et une différentiation de (2.11) par rapport au temps nous donnent le système elliptique suivant d'équations nonlinéaires :

$$(3.1) \quad x_\xi u_\eta + (\delta y_\xi)(\delta v_\eta) - x_\eta u_\xi - (\delta y_\eta)(\delta v_\xi) = 0,$$

$$(\delta y_\xi)u_\eta - x_\xi(\delta v_\eta) - (\delta y_\eta)u_\xi + x_\eta(\delta v_\xi) = 0.$$

Et ainsi, les coefficients de séries formelles de Taylor de solution $(x, \delta y)$ satisfont aux équations (2.28) - (2.29).

On définit des énergies $E(DX^n)$ et $E(D^m X^n)$, $m \geq 1$, pour $n \geq 1$ par

Définition 3.1 $E(\phi)$ pour $\phi \in C^\infty(\Omega_1)$

$$E(\phi) \equiv \|\phi\| + \|D_\xi \phi\| + \|D_\eta \phi\| + \|\phi(1)\| + \|D_\xi \phi(1)\| + \|(D_\eta \phi)(1)\|,$$

où

$$\|\phi\| = \|\phi\|_0 + \|D\phi\|_0 + \|D^2\phi\|_0; \quad \|\phi(1)\| = \|\phi(1)\|_0 + \|D\phi(1)\|_0 + \|D^2\phi(1)\|_0$$

avec $D = D_\xi$ ou D_η et

$$\|\phi\|_0^2 = \int_{-1}^1 \int_{-\infty}^{\infty} |\phi(\xi, \eta)|^2 d\xi d\eta; \quad \|\phi(1)\|_0 = \int_{-1}^1 \int_{-\infty}^{\infty} |\phi(\xi, 1)|^2 d\xi;$$

Et pour $m \geq 1$, pour $n \geq 1$:

$E(D^m \phi)$ pour $\phi \in C^\infty(\Omega_1)$

$$E(D^m \phi) \equiv \|D^m \phi\| + \|D_\xi D^m \phi\| + \|D_\eta D^m \phi\| + \\ + \|D^m \phi(1)\| + \|D_\xi D^m \phi(1)\| + \|(D_\eta D^m \phi)(1)\|,$$

où

$$\|D^m \phi\| = \sum_{0 \leq \mu \leq m} \theta^\mu \|D_\xi^{m-\mu} D_\eta^\mu \phi\|; \\ \|D^m \phi(1)\| = \sum_{0 \leq \mu \leq m} \theta^\mu \|(D_\xi^{m-\mu} D_\eta^\mu \phi)(1)\|, \quad 0 \leq \theta \leq 1.$$

D'après la transformée de Fourier, l'équation (2.28) se ramène à l'équation intégrale suivante pour la transformée de Fourier $\hat{x}^n(\eta)$ avec la fonction de Green:

$$\begin{aligned}\hat{x}^n(\eta) &= [\text{ch}(2\pi\delta k\eta)/\text{ch}(2\pi\delta k)]\hat{x}^n(1) + \\ &\quad \int_{-1}^{\eta} \delta^2/[(2\pi\delta k)\text{sh}(4\pi\delta k)] [\text{sh}(2\pi\delta k(\eta-1))\text{sh}(2\pi\delta k(\sigma+1))] \hat{f}^{n-1}(\sigma) d\sigma + \\ &\quad \int_{\eta}^1 \delta^2/[(2\pi\delta k)\text{sh}(4\pi\delta k)] [\text{sh}(2\pi\delta k(\eta+1))\text{sh}(2\pi\delta k(\sigma-1))] \hat{f}^{n-1}(\sigma) d\sigma =\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= [\text{ch}(S\eta)/\text{ch}(S)]\hat{x}^n(1) + \\ &\quad \int_{-1}^{\eta} \delta^2/[S\text{sh}(2S)] [\text{sh}(S(\eta-1))\text{sh}(S(\sigma+1))] \hat{f}^{n-1}(\sigma) d\sigma + \\ &\quad \int_{\eta}^1 [\text{sh}(S(\eta+1))\text{sh}(S(\sigma-1))] \hat{f}^{n-1}(\sigma) d\sigma =\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= [\text{ch}(S\eta)/\text{ch}(S)]\hat{x}^n(1) - \\ &\quad -S[\delta^2/\text{sh}(2S)] [\int_{-1}^{\eta} \text{sh}(S(\eta-1))\text{sh}(S(\sigma+1))\phi^{n-1}(\sigma) d\sigma + \int_{\eta}^1 \text{sh}(S(\eta+1))\text{sh}(S(\sigma-1))\phi^{n-1}(\sigma) d\sigma] - \\ &\quad -iS[\delta^2/\text{sh}(2S)] [\int_{-1}^{\eta} \text{sh}(S(\eta-1))\text{ch}(S(\sigma+1))\psi^{n-1}(\sigma) d\sigma + \int_{\eta}^1 \text{sh}(S(\eta+1))\text{ch}(S(\sigma-1))\psi^{n-1}(\sigma) d\sigma] -\end{aligned}$$

$$-i[\delta/\text{sh}(2S)][\int_{-1}^{\eta} \text{sh}(S(\eta-1))\text{sh}(S(\sigma+1))w^{n-1\wedge}(\sigma)d\sigma + \int_{\eta}^1 \text{sh}(S(\eta+1))\text{sh}(S(\sigma-1))w^{n-1\wedge}(\sigma)d\sigma] + \\ -\phi^{n-1\wedge}(\eta) - [\text{sh}(S\eta)/\text{sh}S]\phi^{n-1\wedge}(1); \text{ où } S = 2\pi\delta k, i = (-1)^{1/2}.$$

De même pour δy^n , d'où les lemmes 2.1-2.2 d'après un calcul ordinaire.

4. Estimations a priori pour la pression. Les coefficients p^n sont définis par X^n puisqu'ils satisfont aux équations (2.18):

$$(2.18) \quad X^n + (1/\delta) (\delta y^{n-2}) + p^{n-2} + \Phi^{n-1} = 0, \quad n \geq 3; \quad X^2 + p^0 = 0,$$

c'est-à-dire:

$$(4.1) \quad D_{\xi}^2 p^{n-2} + D_{\eta}^2 p^{n-2} = -D_{\xi} X^n - D_{\eta}(\delta y^n) - D_{\xi} \phi^{n-1} - D_{\eta} \psi^{n-1} - \\ - (1/\delta)[D_{\eta}^2(\delta y^{n-2}) + D_{\xi}^2(\delta y^{n-2})], \quad n \geq 3;$$

$$D_{\xi}^2 p^0 + D_{\eta}^2 p^0 = -D_{\xi} X^2 - D_{\eta}(\delta y^2) - D_{\xi} \phi^1 - D_{\eta} \psi^1.$$

D'où, l'on obtient la proposition suivante comme les propositions 2.1-2.2:

Proposition 4.1 Il existe une constante positive indépendante de (n, δ) telle que l'on ait

$$E(\delta p^{n-2}) \leq C[E(X^n) + E(X^{n-2}) + E(DX^{n-2}) + \sum_{2 \leq v \leq n-1} C_{v-2} E(X^v) E(X^{n-v})], \\ E(D^m(\delta p^{n-2})) \leq C[E(D^m X^n) + E(D^{m-1} X^n) + E(D^m X^{n-2}) + \\ + \sum_{2 \leq v \leq n-1} C_{v-2} \{ \sum_{0 \leq \mu \leq m-1} C_{\mu} E(D^{\mu} X^v) E(D^{m-\mu-1} X^{n-v}) + \\ + \sum_{0 \leq \mu \leq m} C_{\mu} E(D^{\mu} X^v) E(D^{m-\mu} X^{n-v}) \}].$$

5. La convergence de la série $\sum_n (E(X^n)/n!)t^n$. Nous suivrons essentiellement les idées de Shinbrot dans [28]. Cette majorante pour (2.17) est convergente pour un temps suffisamment petit pour les données initiales $X^1 = (x^1, \delta y^1)(\xi, \eta)$ uniformément analytiques définies par

Définition 5.1 $X^1 = (x^1, \delta y^1)(\xi, \eta)$ sont uniformément analytiques sur la bande $\Omega_1 = \{(\xi, \eta): 0 < |\eta| \leq 1\}$

Il existe les constantes C et R positives telles que l'on ait

$$\|D^m X^1\| \leq C R^m m!, \quad m = 0, 1, 2, 3, \dots$$

étant donné un nombre q positif, il existe les constantes c et r positives telles que l'on ait

$$\|D^m X^1\| \leq c r^{m(m+1)-q} m!, \quad m = 0, 1, 2, 3, \dots$$

On peut démontrer par récurrence le

Théorème 5.2 Supposons que les données initiales $X^1 = (x^1, \delta y^1)(\xi, \eta)$ soient uniformément analytiques. Soit $q > 3/2$, il existe $\gamma > 0$, $r > 0$ et $\varepsilon > 0$, petite, telles que l'on ait:

$$(1) \quad E(X^n) \leq \gamma n!(n+1)^{-2q} (r/\varepsilon)^{n-1}, \quad n \geq 1;$$

$$(2) \quad E(D^m X^n) \leq \gamma (m+n-1)!(n+1)^{-q} (m+n+1)^{-q} r^m (r/\varepsilon)^{n-1}, \quad m \geq 1, n \geq 1.$$

Ceci montre l'existence de solution analytique pour notre problème des ondes superficielles de l'eau en assurant la convergence de séries (2.17)^{1,2,3}. Soient en effet

$$\gamma n!(n+1)^{-2q} (r/\varepsilon)^{n-1} \equiv c_n, \quad n \geq 1;$$

$$\gamma (m+n-1)!(n+1)^{-q} (m+n+1)^{-q} r^m (r/\varepsilon)^{n-1} \equiv a_n b_{m+n},$$

avec

$$a_n = \gamma (n+1)^{-q} (1/\varepsilon)^{n-1}, \quad b_k = (k-1)!(k+1)^{-q} k^{-1},$$

alors l'estimation dans la Proposition 2.1, par exemple, s'écrit comme:

$$E(DX^n) \leq c[a_{n-2}b_{n-1} + a_{n-2}b_n + \\ + \sum_{2 \leq v \leq n-1} a_{n-2}C_{v-2} c_v(c_{n-v} + a_{n-v}b_{n-v+1}) + \dots],$$

on voit qu'il existe des constantes $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \dots$ etc telles que l'on ait les inégalités:

$$a_{n-2}b_{n-1} \leq \gamma_1 \varepsilon^2 c_n, \quad a_{n-2}b_n \leq \gamma_2 \varepsilon^2 c_n, \dots, \text{ etc.,}$$

qui nous donnent enfin

$$E(DX^n) \leq c\varepsilon(\gamma_1 \varepsilon + \gamma_2 \varepsilon + \gamma_3 + \dots) c_n.$$

On a donc $E(DX^n) \leq c_n$ si l'on choisit ε convenablement petit pour que $c\varepsilon(\gamma_1 \varepsilon + \gamma_2 \varepsilon + \gamma_3 + \dots)$ soit plus petite que 1.

Notons comme dernière remarque que toutes les estimations a priori sont uniformes par rapport au paramètre δ , et que par conséquent notre solution $\{x, \delta y, \delta p\}$ analytique est indéfiniment différentiable par rapport à δ . D'où la légitimité mathématique du développement de Friedrichs pour les ondes de surface de l'eau.

Remarque 5.3 Plus haut, nous avons démontré qu'en fait notre solution $\{x, \delta y, \delta p\}$ satisfait aux équations comme les fonctions analytiques par rapport aux $(\xi, \delta \eta)$ qui sont indéfiniment différentiables par rapport à δ . Nous avons considéré en effet le développement de solution en séries de Taylor par rapport aux (D_ξ, D_η) avec $D_\eta = (1/\delta) \partial / \partial \eta$, ce qui revient à la dérivation par rapport à $\delta \eta$.

6. Equations approchées. Dans ce dernier paragraphe, nous donnons l'équation des ondes en eau peu profonde et l'équation de Boussinesq via l'équation de Korteweg-de Vries comme des équations approchées dans le système de coordonnées de Lagrange.

(1) L'équation des ondes en eau peu profonde: on a d'abord le

Théorème 6.1 La solution uniformément analytique du problème (2.1) - (2.6) satisfait à l'équation $x_{tt}x_\xi - x_{\xi\xi} = O(\delta^2)$ sur la surface de l'eau $\eta = 1$, autrement dit, $X(t, \xi)$ définie par $x(t, \xi, 1) = \xi + X(t, \xi)$ satisfait à $X_{tt} - (1 + X_\xi)^{-1}X_{\xi\xi} = O(\delta^2)$ au sens d'énergie $E(X)$.

C'est-à-dire que l'équation hyperbolique quasilineaire $u_{tt} - (1 + u_\xi)^{-1}u_{\xi\xi} = 0$ est en fait l'équation d'Airy pour les solutions analytiques dans le système de coordonnées de Lagrange:

Théorème 6.2 Le problème de Cauchy pour $u_{tt} - (1 + u_\xi)^{-1}u_{\xi\xi} = 0$ avec les données initiales $u(0, \xi) = X(0, \xi) = 0$ et $u_t(0, \xi) = X_t(0, \xi) = x^1(0, \xi)$ admet une solution unique uniformément analytique satisfaisant à $E(u) - c_0 < 1$ et qui approche $X(t, \xi)$ satisfaisant à $E(X(t, \xi)) - c_0 < 1$ au sens que l'on ait:

$$E(X_t(t) - u_t(t)) = O(\delta^2), \quad E(X_\xi(t) - u_\xi(t)) = O(\delta^2),$$

d'après la continuité de solutions par rapport aux seconds membres.

Remarque 6.3 F.Ursell "approche" $(1 + X_\xi)^{-1}$ par $1 - X_\xi$ et il donne [32] "son" équation des ondes en eau peu profonde: $u_{tt} - u_{\xi\xi} - (1/2)(u^2)_{\xi\xi} = 0$ comme l'équation d'Airy. En effet, en partant de l'équation (2.21) sur la surface, on obtient le théorème 6.1 comme la conséquence des deux propositions suivantes: d'abord

Lemme 6.4 $\delta y^{n-1} = O(\delta), D_\xi(\delta y^{n-1}) = O(\delta), D_\eta(\delta y^{n-1}) = O(\delta),$

$$D_\xi(x^{n-1}) = O(\delta), D_\eta(x^{n-1}) = O(\delta).$$

Lemme 6.5 $w^{n-1} = O(\delta^2), n \geq 2; (D_\eta(\delta^2) - D_\xi \psi^{n-1}) = O(\delta^2), n \geq 3.$

On montre ces deux lemmes par récurrence en appliquant l'un à l'autre alternativement. Ils impliquent la

Proposition 6.6
$$\sum_n x^n(1) + (\phi^{n-1})(1) = x_{tt}x_\xi + O(\delta^2) .$$

On a ensuite

Lemme 6.7
$$\int_{-1}^1 D_\xi w^{n-1} d\eta = O(\delta^2).$$

Lemme 6.8
$$\begin{aligned} (-1/\delta)D_\eta(x^{n-2})(1) &= \\ &= (A_\delta/\delta)D_\xi(x^{n-2})(1) + (1/\delta)(D_\eta\phi^{n-1} - D_\xi\psi^{n-1})(1) + O(\delta^2), \end{aligned}$$

où A_δ/δ est l'opérateur pseudo-différentiel défini par l'image inverse de transformée de Fourier de $i(\text{th}(2\pi\delta s))/\delta$ par rapport à s . D'où la

Proposition 6.9
$$\int_{-1}^1 D_\xi^2 x^{n-2} d\eta = D_\xi^2 x^{n-2}(1) + O(\delta^2).$$

Preuve On voit en effet que

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 D_\xi^2 x^{n-2} d\eta &= \int_{-1}^1 (-D_\eta^2 x^{n-2} + f^{n-3}) d\eta = \\ &= -(1/\delta) D_\eta x^{n-2}(1) - (1/\delta) (D_\eta \phi^{n-3} - D_\xi \psi^{n-3})(1) - \int_{-1}^1 D_\xi^2 w^{n-3} d\eta , \end{aligned}$$

d'où la proposition étant donnés les lemmes 6.7 - 6.8.

(2) L'équation de Boussinesq et de Korteweg-de Vries pour les ondes longues.

Considérons maintenant le mouvement de déplacement moyen de surface de la surface de l'eau en repos. C'est-à-dire qu'on étudie la fonction $Y(t, \xi, \eta)$ définie par $y = \eta + Y$, ce qui revient à l'étude de la surface libre de l'eau $Y = y - h$, h étant la profondeur moyenne de l'eau en repos.

Soit, en outre, α l'ampleur moyenne des ondes superficielles de l'eau. Au moyen de variables non-dimensionnelles (*) de § 2, on définit l'ampleur non-dimensionnelle Y' par

$$\begin{aligned} y &= \eta + Y = hy' = \\ &= h\eta' + Y = h(\eta' + Y/h) = \\ &= h(\eta' + (\alpha Y')/h) = h(\eta' + \varepsilon Y'), \quad \varepsilon = \alpha/h. \end{aligned}$$

D'où $y' = \eta' + \varepsilon Y' = \eta' + \delta^2 Y'$ en définissant les ondes longues (voir § 1) par le mouvement d'une surface $Y'(1)$ définie par

$$(\#\#) \quad y'(1) = 1 + \delta^2 Y'(1),$$

où $y'(1) = y'(t, \xi, 1)$ etc, et la condition (#) "simplifiée" des ondes longues : $\varepsilon = \delta^2$.

Correspondant à Y' , on définit les autres quantités non-dimensionnelles X' et P' par

$$\begin{aligned} x &= \lambda x' = \xi + \delta^2 X = \\ &= \lambda(\xi' + \delta^2 X'); \\ p &= \rho g h p' = \\ &= \rho g(h - \eta) + P = \\ &= \rho g h(1 - \eta') + \rho g h \delta^2 P' = \\ &= \rho g h((1 - \eta') + \delta^2 P') \end{aligned}$$

d'où

$$x' = \xi' + \delta^2 X' \quad \text{et} \quad p' = (1 - \eta') + \delta^2 P'.$$

Elles satisfont aux équations suivantes en laissant tomber le signe prime:

les équations du mouvement,

$$(6.1) \quad \mathbf{X}_{tt} + (1/\delta)D_{\xi}(\delta\mathbf{Y}) + \delta^2\mathbf{X}_{tt}D_{\xi}\mathbf{X} + \delta^2(\delta\mathbf{Y})_{tt}D_{\xi}(\delta\mathbf{Y}) + D_{\xi}\mathbf{P} = 0,$$

$$(6.2) \quad (\delta\mathbf{Y})_{tt} + (1/\delta)D_{\eta}(\delta\mathbf{Y}) + \delta^2\mathbf{X}_{tt}D_{\eta}\mathbf{X} + \delta^2(\delta\mathbf{Y})_{tt}D_{\eta}(\delta\mathbf{Y}) + D_{\eta}\mathbf{P} = 0;$$

l' équation de continuité,

$$(6.3) \quad D_{\xi}\mathbf{X} + D_{\eta}\mathbf{Y} + \delta^2(D_{\xi}\mathbf{X}D_{\eta}\mathbf{Y} - D_{\eta}\mathbf{X}D_{\xi}\mathbf{Y}) = 1,$$

dans

$$(6.4) \quad \Omega_1 = \{ (\xi, \eta): 0 < |\eta| < 1 \}.$$

Les séries formelles de Taylor sont maintenant:

$$(6.5)^1 \quad x = \xi + \delta^2 X = \xi + \sum_{1 \leq n < \infty} \delta^2 (X^n(\xi, \eta; \delta) / n!) t^n,$$

$$(6.5)^2 \quad y = \eta + \delta^2 Y = \eta + \sum_{1 \leq n < \infty} \delta^2 (Y^n(\xi, \eta; \delta) / n!) t^n,$$

$$(6.5)^3 \quad p = (1 - \eta) + \delta^2 P = -(\eta - 1) + \sum_{0 \leq n < \infty} \delta^2 (P^n(\xi, \eta; \delta) / n!) t^n.$$

D'où l'on obtient, en minuscules comme plus haut, les équations suivantes:

$$(6.6) \quad x^n + (1/\delta)D_{\xi}(\delta y^{n-2}) + \delta^2 \phi^{n-1} + D_{\xi} p^{n-2} = 0, \quad n \geq 3; \quad x^2 + D_{\xi} p^0 = 0,$$

$$(6.7) \quad \delta y^n + (1/\delta)D_{\eta}(\delta y^{n-2}) + \delta^2 \psi^{n-1} + D_{\eta} p^{n-2} = 0, \quad n \geq 3; \quad \delta y^2 + D_{\eta} p^0 = 0,$$

c'est-à-dire

$$D_{\eta}x^n - D_{\xi}(\delta y^n) + \delta^2(D_{\eta}\phi^{n-1} - D_{\xi}\psi^{n-1}) = 0,$$

avec $\phi^1 = \psi^1 = 0$, et aussi

$$(6.8) \quad D_{\xi}x^n + D_{\eta}(\delta y^n) + \delta^2 w^{n-1} = 0, \quad n \geq 2; \quad D_{\xi}x^1 + D_{\eta}(\delta y^1) = 0, \quad w^0 = 0;$$

avec les conditions aux bords:

$$(6.9) \quad p^n(\xi, 1; \delta) = 0, \quad n \geq 0; \quad \delta y^n(\xi, 0; \delta) = 0, \quad n \geq 1;$$

Enfin l'équation de la surface de l'eau $\eta = 1$:

$$(6.10) \quad x^n(1) + (1/\delta)D_{\xi}(\delta y^{n-2}(1)) + \delta^2 \phi^{n-1}(1) = 0, \quad n \geq 3; \quad x^2(1) = 0;$$

avec

$$(6.11) \quad (1/\delta)D_{\xi}(\delta y^{n-2}(1)) = - (1/2) \int_{-1}^1 D_{\xi}x^{n-2}d\eta - (1/2)\delta^2 \int_{-1}^1 D_{\xi}w^{n-3}d\eta,$$

c'est-à-dire

$$x^n(1) - (1/2) \int_{-1}^1 D_{\xi}^2 x^{n-2}d\eta + \delta^2 \phi^{n-1}(1) - (1/2)\delta^2 \int_{-1}^1 D_{\xi}w^{n-3}d\eta = 0.$$

De même que dans § 1, on a la

Proposition 6.10 $D_{\xi} y^{n-2}(1) = -D_{\xi}^2 x^{n-2} - (1/3)\delta^2 D_{\xi}^4 x^{n-2}(1) + O(\delta^4),$

d'après le

Lemme 6.11 $D_{\xi}(D_{\eta} \phi^{n-3} - D_{\xi} \psi^{n-3})(\eta) = O(\delta^2), \quad D_{\xi} w^{n-3}(\eta) = O(\delta^2).$

Cela implique alors le

Théorème 6.12 Sur la surface de l'eau $\eta = 1$, on a

$$(6.12) \quad x_{tt} + \delta^2 x_{tt} x_{\xi} - x_{\xi\xi} - (1/3)\delta^2 x_{\xi\xi\xi\xi} = O(\delta^4),$$

pour $x(t, \xi) = X(t, \xi, 1).$

Corollaire 6.13 Le théorème revient à dire que $u = -x_{\xi}$ satisfait à

$$u_{tt} - u_{\xi\xi} - \delta^2((1/2)u^2 + (1/3)u_{\xi\xi})_{\xi\xi} = O(\delta^4).$$

En effet, on voit que

$$x_{\xi\xi}/(1 + \delta^2 x_{\xi}) - (1 - \delta^2 x_{\xi}) x_{\xi\xi} = \delta^4 x_{\xi}^2 x_{\xi\xi}/(1 + \delta^2 x_{\xi}) + O(\delta^4),$$

d'où le corollaire. Mais il ne s'ensuit pas immédiatement une justification mathématique pour l'équation de Boussinesq comme une équation approchée des ondes longues superficielles de l'eau. En effet, l'équation de Boussinesq

$$U_{tt} - U_{\xi\xi} - \delta^2((1/2)U^2 + (1/3)U_{\xi\xi})_{\xi\xi} = 0$$

a une " mauvaise" relation de dispersion. Nous avons en fait le

Théorème 6.14 Les ondes longues de surface de l'eau $\mathbf{x}$ sont approchées par les solutions $F(t, \xi)$ et $G(t, \xi)$ des équations de Korteweg - de Vries

$$F_t - F\xi - \delta^2(FF_\xi + (1/3)F_{\xi\xi\xi}) = \delta^2 R^0 \quad \text{et} \quad G_t + G\xi + \delta^2(GG_\xi + (1/3)G_{\xi\xi\xi}) = \delta^2 Q^0,$$

satisfaisant aux conditions initiales $F(0) = \mathbf{x}_\xi(0, \xi) + \mathbf{x}_t(0, \xi)$ et $G(0) = \mathbf{x}_\xi(0, \xi) - \mathbf{x}_t(0, \xi)$ avec

$$R^0 = -(u^0 v^0 + (1/2)(v^0)^2 + (1/3)v^0_{\xi\xi})_\xi \quad \text{et} \quad Q^0 = -(u^0 v^0 - (1/2)(v^0)^2 + (1/3)v^0_{\xi\xi})_\xi,$$

où $u^0 = \mathbf{x}^0_\xi$, $v^0 = \mathbf{x}^0_t$, $\mathbf{x}^0$ étant la première approximation $\mathbf{x}^0_{tt} - \mathbf{x}^0_{\xi\xi} = 0$ sur $\eta = 1$

pour (6.1) - (6.3), avec des données initiales $\mathbf{x}^0(0, \xi) = \mathbf{x}(0, \xi)$ et $\mathbf{x}^0_t(0, \xi) = \mathbf{x}_t(0, \xi)$,

satisfaisant à $E((\mathbf{x}^0_t - \mathbf{x}_t)(t)) = O(\delta^2)$, $E((\mathbf{x}^0_\xi - \mathbf{x}_\xi)(t)) = O(\delta^2)$.

Preuve En effet, (6.12) s'écrit comme suit:

$$u_t - v_\xi = 0, \quad v_t - u_\xi - \delta^2(uu_\xi + (1/3)u_{\xi\xi\xi}) = O(\delta^4),$$

avec $u = \mathbf{x}_\xi$, $v = \mathbf{x}_t$ et des données initiales $u(0, \xi) = \mathbf{x}_\xi(0, \xi) = \mathbf{X}_\xi(0, \xi, 1)$, $v(0, \xi) = \mathbf{x}_t(0, \xi) = \mathbf{X}^1(\xi, 1)$. Alors, $f = u+v$, $g = u-v$ satisfait, respectivement, à l'équation suivante:

$$f_t - f_\xi - \delta^2(ff_\xi + (1/3)f_{\xi\xi\xi}) = \delta^2 R + O(\delta^4),$$

$$g_t + g_\xi + \delta^2(gg_\xi + (1/3)g_{\xi\xi\xi}) = \delta^2 Q + O(\delta^4),$$

avec $R = -(uv + (1/2)v^2 + (1/3)v_{\xi\xi})_\xi$ et $Q = -(uv - (1/2)v^2 + (1/3)v_{\xi\xi})_\xi$. On a donc

$$E(f(t) - F(t)) = O(\delta^4) \quad \text{et} \quad E(g(t) - G(t)) = O(\delta^4),$$

d'après la dépendance continue de solutions des seconds membres, vu que $R(t) - R^0(t) = O(\delta^2)$, $Q(t) - Q^0(t) = O(\delta^2)$. D'où le théorème, puisque l'on a

$$u(t) = (1/2)(f+g)(t) = (1/2)(F+G)(t) + O(\delta^4), \quad v(t) = (1/2)(f-g)(t) = (1/2)(F-G)(t) + O(\delta^4);$$

c'est-à-dire que l'on obtient $E(2x_\xi(t) - (F + G)(t)) = O(\delta^4)$ et $E(2x_t(t) - (F - G)(t)) = O(\delta^4)$.

Pour clore, remarquons que l'on retrouve le même résultat que celui dans [10], page 405, la proposition 3.1: l'équation de Korteweg-de Vries est justifiée mathématiquement comme l'équation approchée pour les ondes longues de surface de l'eau dont les données initiales satisfont aux conditions $E(f(0)) = O(1)$ et $E(g(0)) = O(\delta^2)$. C'est-à-dire que l'on a la

Proposition 6.15 Supposons que les données initiales satisfassent aux conditions suivantes:

$$(\#\#) \quad E(x_\xi(0, \xi) + x_t(0, \xi)) = O(1), \quad E(x_\xi(0, \xi) - x_t(0, \xi)) = O(\delta^2).$$

Alors les ondes longues de surface de l'eau sont approchées par les solutions des équations de Korteweg-de Vries suivantes:

$$F_t - F_\xi - \delta^2((3/4)FF_\xi + (1/2)F_{\xi\xi\xi}) = 0, \quad$$

$$G_t + G_\xi + \delta^2((3/4)GG_\xi + (1/2)G_{\xi\xi\xi}) = \delta^2(-(3/4)FF_\xi + (1/6)F_{\xi\xi\xi}),$$

satisfaisant aux conditions initiales $F(0) = F(0)$ et $G(0) = G(0)$, au sens que l'on ait

$$E(f(t) - F(t)) = O(\delta^4) \quad \text{et} \quad E(g(t) - G(t)) = O(\delta^4).$$

Preuve D'après les définitions de f et g , on voit que $\delta^2 R$ et $\delta^2 Q$ s'écrivent comme

$$\begin{aligned}\delta^2 R &= \delta^2(- (1/4)ff_\xi + (1/6)f_{\xi\xi\xi}) + \delta^2((3/4)gg_\xi - (1/4)(fg)_\xi - (1/6)g_{\xi\xi\xi}), \\ \delta^2 Q &= \delta^2((1/4)gg_\xi - (1/6)g_{\xi\xi\xi}) + \delta^2(-(3/4)ff_\xi + (1/4)(fg)_\xi + (1/6)f_{\xi\xi\xi}).\end{aligned}$$

Par conséquent, on obtient d'abord

$$f_t - f_\xi - \delta^2((3/4)ff_\xi + (1/2)f_{\xi\xi\xi}) = O(\delta^4),$$

puisque l'on a $g(t) = O(\delta^2)$ d'après la dépendance continue des solutions des données initiales et des seconds membres d'équation pour g . Ainsi $f(t) - F(t)$ satisfait à l'équation linéarisée non-homogène de Korteweg-deVries avec un second membre d'ordre $O(\delta^4)$ et la donnée initiale nulle. D'où l'on obtient $f(t) = F(t) + O(\delta^4)$. De même, on obtient $g(t) = G(t) + O(\delta^4)$ puisque l'on a

$$g_t + g_\xi + \delta^2((3/4)gg_\xi + (1/2)g_{\xi\xi\xi}) = \delta^2(-(3/4)ff_\xi + (1/6)f_{\xi\xi\xi}) + O(\delta^4),$$

compte tenu du fait que $E(f(t) - F(t)) = O(\delta^4)$ et $g(0) - G(0) = 0$. D'où la proposition, puisque l'on a

$$\begin{aligned}u(t) = x_\xi(t, \xi) &= (1/2)(f + g)(t, \xi) = (1/2)(F(t, \xi) + G(t, \xi)) + O(\delta^4), \\ v(t) = x_t(t, \xi) &= (1/2)(f - g)(t, \xi) = (1/2)(F(t, \xi) - G(t, \xi)) + O(\delta^4).\end{aligned}$$

Bibliographie

(Tout n'est pas nécessairement cité dans le texte)

- [1] G.B.Airy:Tides and wave, B.Fellowes, London, 1845, 241-396.
- [2] J.Boussinesq:Théorie des ondes, J.Math.Pure.Appl., 2e série, t.17(1872), 55-108.
- [3] R.Courant-K.-O.Friedrichs:Supersonic flow and shock waves, Springer, 1948 and 1976.
- [4] W.Craig:An existence theory for water waves and the Boussinesq and Korteweg-de Vries scaling limits, Comm.in PDE, 10(1985), 787-1003.

- [5] K.-O.Friedrichs:On the derivation of the shallow water theory,Appenndix to: "The formation of breakers and bores " by J.J.Stoker in Comm.Pure Appl.Math., 1(1948), 1-87.
- [6] K.-O.Friedrichs-D.H.Hyers:The existence of the solitary waves, Comm. Pure Appl. Math., 7(1954), 517-550.
- [7]_____:Asymptotic phenomena in mathematical physics, Bull.AMS, 61(1955), 485-504.
- [8] T.Kano-T. Nishida:Sur les ondes de surface de l'eau avec une justification mathématique des équations des ondes en eau peu profonde, J.Math.Kyoto Univ., 19(1979), 335-370.
- [9]_____:Water waves and Friedrichs expansion., Lect.Note.Num.Appl.Anal., Kinokuniya-North Holland, 6(1983), 39-57.
- [10]_____:A mathematical justification for Korteweg-de Vries equation and Boussinesq equation of water surface waves, Osaka J.Math., 23(1986), 389-413.
- [11] T.Kano:Une théorie trois-dimensionnelle des ondes de surface de l'eau et le développement de Friedrichs, J.Math. Kyoto Univ., 26(1986), 101-155 et 157-175.
- [12] T.Kano:L'équation de Kadomtsev-Petviashvili approchant des ondes longues de surface de l'eau en écoulement trois-dimensionnel., Studies Math.Appl., 18: "Patterns and Waves- Qualitative analysis of nonlinear differential equations ", North Holland, 1986, 431-444.
- [13] D.J.Korteweg-G.de Vries:On the change of the form of long waves advancing in a rectangular canal and a new type of water surface waves, Phil. Magazine, 39(1895), 422-443.
- [14] L.Lagrange:Mécanique analytique, t.2, Mme Ve Courcier, Paris, 1815.
- [15] H.Lamb:Hydrodynamics,6th ed., Dover, 1932.
- [16] M.Lavrentiev:On the theory of long waves, Recueil des Travaux de l'Institut Mathématique de l'Académie des Sciences de la RSS d'Ukraine 1946, no. 8, 13-69(1947).
- [17] T.Levi-Civita:Détermination rigoureuse des ondes permanentes d'ampleur finie, Math. Annalen 93(1925), 264-314.
- [18] V.I.Nalimov:Cauchy-Poisson problem, Continuum Dynamics, Hydrodynamics Institut, Siberian Section, URSS Akad. Nauk, 18(1974), 104-210.
- [19]_____:A priori estimates of solutions of elliptic equations in the class of analytic functions and their applications to the Cauchy-Poisson problem, Soviet Math.Dokl., 10(1969), 1350-1354.
- [20] L.Nirenberg:An abstract form of the nonlinear Cauchy-Kowalevski theorem, J.Diff. Geometry, 6(1972), 561-576.

- [21] T.Nishida:A note on a theorem of Nirenberg, *J.Diff.Geometry*,12(1977), 629-633.
- [22] T.Nishida:Nonlinear hyperbolic equations and related topics in fluid dynamics, Publications Mathématiques d'Orsay, Université Paris-Sud, Département de Mathématiques, Orsay, 1978.
- [23] T.Nishida:Equations of Fluid Dynamics - Free Surface Problems, *Comm. Pure Appl. Math.*, 39(1986), 221-238.
- [24] L.V.Ovsjannikov:Problème de Cauchy nonlinéaire dans l'échelle des espaces de Banach, *Dokl.Akad.Nauk URSS*, 200(1971), 789-792.
- [25] _____:To the shallow water theory foundation, *Arch.Mech.*,(Varsovie), 26 (1974), 407-422.
- [26] _____:Cauchy problem in a scale of Banach spaces and its application to the shallow water theory justification, *Lect.Note in Math.*, Springer-Verlag, 503 (1976), 426-437.
- [27] J.Scott Russell:Report on waves, in "Report of the fourteenth meeting of the British Association for the Advancement of Science held at York in September 1844", John Murray, London, 1845, 311-390.
- [28] M.Shinbrot:The initial value problem for surface waves under gravity, I.The simplest case, *Indiana Univ.Math.J.*, 25(1976), 281-300.
- [29] J.J.Stoker:Water waves, the mathematical theory with applications, Interscience, New York, 1957.
- [30] G.G.Stokes:On the theory of oscillatory waves, *Trans.Camb.Phil.Soc.*, 8(1847), 441-455.
- [31]D.J.Struik:Détermination rigoureuse des ondes irrotationnelles périodiques dans un canal à profondeur finie, *Math.Annalen*, 95(1925), 595-634.
- [32] F.Ursell:The long wave paradox in the theory of gravity waves, *Proc. Phil. Soc. Cambridge*, 49(1953), 685-694.
- [33] L.C.Woods:The theory of subsonic plane flow, Cambridge University Press, 1961.
- [34] H.Yosihara:Gravity waves on the free surface of an incompressible perfect fluid of finite depth, *Publ.RIMS, Kyoto Univ.*, 18(1982), 49-96.
- [35] _____:Gravity waves on the free surface of an incompressible perfect fluid of finite depth, (Revised unpublished manuscript), april 1982.
- [36] _____:Capillary-gravity waves for an incompressible ideal fluid, *J.Math.Kyoto Univ.*, 23(1983), 649-694.

(3 mai 2001)